西北师范大学物理与电子工程学院

函授教育 2007 年暑期数学物理方法课程考试试卷(A)

班级：________________ 学号：________________

姓名：________________ 任课教师：________________

题号	一	二	三	总分
分数				

请考生注意：以下各题需写出主要解答步骤，请保持卷面整洁。

一、复变函数部分(共 **30** 分**)**

1. (**7** 分) 已知复数 $z=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$，请求出复数 z 的实部 u 、虚部 v 、模 $|z|$、主幅角 $\arg z$,并用三角形式、指数形式、几何形式(复平面)分别表示复数 z .

2. (**5** 分) 将直线 $x-3y=4$ 化为复数表示式.

3. (**8** 分) 判别 $f(z)=x^3-y^3+i2x^2y^2$ 的可导性与解析性。

4. (**5** 分) 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}$ 在 $0<|z-1|<1$ 内展成洛朗级数.

5. (**5** 分) 利用留数定理计算围线积分 $\oint_{|z|=2}\dfrac{z}{\frac{1}{2}-\cos z}dz$.

二、数学物理方程部分(共 **55** 分**)**

1. (**10**分) 数学物理方程有两大基本任务：导出定解问题和求解相应的定解问题.请问什么是定解问题？定解问题包括哪些要素？我们学习了哪些定解问题?以及求解这些定解问题的主要方法有哪些?

2. (**5** 分) 一根长为 l 的均匀细杆，其温度分布满足如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & (0<x<l,t>0) \\ u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0 & (t\ge 0) \\ u(x,0)=200 & (0\le x\le l) \end{cases}$$

不求解定解问题，从物理角度直观分析细杆上温度随时间的变化情况，并考察 $t\to+\infty$ 时细杆上的温度.

3. (25 分) 分离变量法是求解定解问题的重要方法之一. 请问分离变量法对定解问题有什么要求？ 分离变量法有哪些基本步骤？关键的步骤是什么？ 请用分离变量法求解如下弦振动方程的混合问题(要求写出完整的求解过程)，并分析解的物理意义.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (0<x<l,t>0) \\ u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0 & (t\ge 0) \\ u(x,0)=\dfrac{\sin 2\pi x}{l},\ u_t(x,0)=0 & (0\le x\le l) \end{cases}$$

4、**(15** 分)一根无限长的均匀细杆,其振动满足如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+\dfrac{2}{x}\ u_x) & (-\infty<x<\infty,t>0) \\ u(x,0)=\varphi(x) & (-\infty<x<\infty) \\ u_t(x,0)=\psi(x) & (-\infty<x<\infty) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x),\psi(x)$ 为充分光滑的已知函数. 请用行波法（达朗贝尔解法）求解该定解问题，并说明解的物理意义(提示：令 $v(x,t)=xu(x,t)$) .

三、特殊函数部分(共 **15** 分**)**

1、（7 分）连带勒让德函数的微分表达式为 $P_l^m(x)=\dfrac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\dfrac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$，试求 $P_1^1(x)$.

2、（8 分）l 阶球函数为 $Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}m=0,1,2,\cdots l\\ l=0,1,2,3,\cdots\end{pmatrix}$，记号 $\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}$ 表示或取 $\sin m\varphi$ 或取 $\cos m\varphi$. 已知 $P_1^1(\cos\theta)=\sin\theta$, $P_2^1(\cos\theta)=\dfrac{3}{2}\sin 2\theta$, $P_2^2(\cos\theta)=\dfrac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$，请把函数 $\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi$ 用球函数展开.

参考答案

一、复变函数部分(共 30 分)

1. (**7** 分) $u=\sqrt{2},v=\sqrt{6},|z|=2\sqrt{2},\arg z=\dfrac{\pi}{3}$，三角形式 $z=2\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3})$,指数形式 $z=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$，复平面表示略.

2. (**5** 分) $x=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z}),y=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$,代入直线方程 $x-3y=4$ 得

$$(-3+i)z+(3+i)\overline{z}=8i$$

3. (**8** 分) $u=x^3-y^3,v=2x^2y^2,\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2,\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y^2,\dfrac{\partial v}{\partial x}=4xy^2,\dfrac{\partial v}{\partial y}=4x^2y$, u,v 又连续偏导数，然而，仅当 $x=y=0,x=y=\dfrac{3}{4}$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 才成立. 根据解析函数的判别定理，此函数在任何点不解析，仅在 $z=0$ 和 $z=\dfrac{3}{4}+i\dfrac{3}{4}$ 时可导，但不解析.

4. (**5** 分) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}\dfrac{1}{[1+(z-1)]^2}=\dfrac{1}{z-1}\dfrac{d}{dz}\left(-\dfrac{1}{1+(z-1)}\right)$

$$=\frac{1}{z-1}\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{1+(z-1)}\right)=\frac{1}{z-1}\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n=\frac{1}{z-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-2}=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)(z-1)^n\qquad(0<|z-1|<1).$$

5. (**5** 分) $f(z)=\dfrac{z}{\frac{1}{2}-\cos z}$ 在 $|z|=2$ 内有两个一阶极点 $z=\pm\dfrac{\pi}{3}$，且

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{3}}\frac{z}{\frac{1}{2}-\cos z}=\left.\frac{z}{\left(\frac{1}{2}-\cos z\right)'}\right|_{z=\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},\quad \operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{3}}\frac{z}{\frac{1}{2}-\cos z}=\left.\frac{z}{\left(\frac{1}{2}-\cos z\right)'}\right|_{z=-\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

由留数定理得 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z}{\frac{1}{2}-\cos z}dz=2\pi i\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2 i$.

二、数学物理方程部分(共 55 分)

1. (**10**分)

物理问题在数学上的完整提法是：在给定的定解条件下，求解数学物理方程. 数学物理方程加上相应的定解条件就构成定解问题.

定解问题包括泛定方程和定解条件. 物理规律用偏微分方程表达出来，叫作数学物理方程. 数学物理方程，作为同一类物理现象的共性，反映的是矛盾的普遍性，与具体条件无关，是解决问题的依据，所以又称为泛定方程.定解条件包括边界条件和初始条件，有时还需要衔接条件. 边界条件和初始条件反映了具体问题特定的环境和历史，即矛盾的特殊性. 泛定方程提供解决问题的依据，定解条件提出具体的物理问题，泛定方程和定解条件作为一个整体，合称为定解问题.

学习的定解问题有:**对波动过程**: 针对有界弦， 提出了弦振动方程的混合问题； 针对无界弦，提出了弦振动方程的初值问题(或Cauchy问题).**对传输和扩散过程:** 针对有界杆，提出了热传导方程的混合问题； 针对无界杆，提出了热传导方程的初值问题; 针对一端有界的杆，提出了热传导方程的半无限问题. **对稳定场过程:** 提出了Laplace方程圆、球、半空间、半平面的Dirichlet问题.

求解这些定解问题的主要方法有: 分离变量法(有界空间、无界空间、极坐标系、球坐标系)、Fourier级数法(齐次泛定方程、非齐次泛定方程)、行波解法(或D'Alembert解法)、冲量定理法、格林函数法(波动、热传导、镜像法)等.

2. (**5** 分)

从该定解问题可以看出：杆的左端温度为0，右端绝热，杆内部没有热源，杆上初始时刻各处温度均为常数200.根据热传导规律，杆上的温度将随时间降低，越靠近左端，温度降得越快，最后当$t \to +\infty$时细杆的温度将和左端的温度相等，即杆上各处的温度均为0.

3. (**25** 分)

分离变量法要求定解问题的泛定方程与边界条件必须是齐次的. 分离变量法其基本步骤为：1、变量分离; 2、求解本征值问题; 3、求解另外的常微分方程; 4、特解的叠加; 5、利用定解条件确定叠加系数. 分离变量法关键的步骤是求解本征值问题.

(1). **变量分离**

设$u(x,t)=T(t)X(x)$，代入泛定方程得$\begin{cases} T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \\ X''(x)+\lambda X(x)=0 \end{cases}$，其中$\lambda$为分离常数. 将$u(x,t)=T(t)X(x)$代入边界条件得$X(0)=X(l)=0$.

(2). 求解特征值问题$\begin{cases} X''(x)+\lambda(x)=0 \\ X(0)=0, X(l)=0 \end{cases}$

特征值$\lambda_n=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$，特征函数$X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi x}{l}$，$n=1,2,\cdots$

(3). 求解常微分方程$T''(t)+\lambda_n a^2 T(t)=0$

$T_n(t)=C_n\cos\dfrac{n\pi at}{l}+D_n\sin\dfrac{n\pi at}{l}$，其中$C_n, D_n$为任意常数. 得一系列特解

$$u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)=(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l},\quad n=1,2,\cdots$$

(4). 特解的叠加

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$$

(5). 利用初始条件确定叠加系数

$$u(x,0)=\sin\frac{2\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Rightarrow C_2=1, C_n=0(n\neq 2)$$

$$u_t(x,0)=0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}D_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Rightarrow D_n=0$$

该混合问题的解为$u(x,t)=\cos\dfrac{2\pi at}{l}\sin\dfrac{2\pi x}{l}$.

解的物理意义：该 Fourier 级数解在物理上表示驻波.

4、(15 分)

令$v(x,t)=xu(x,t)$. 化原定解问题为：

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx} & (-\infty<x<\infty, t>0) \\ u(x,0)=x\varphi(x) & (-\infty<x<\infty) \\ u_t(x,0)=x\psi(x) & (-\infty<x<\infty) \end{cases}$$

利用 D'Alembert 公式，有

$$v(x,t)=\frac{(x+at)\varphi(x+at)+(x-at)\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\alpha\psi(\alpha)d\alpha$$，所以，

$$u(x,t)=xv(x,t)=\frac{(x+at)\varphi(x+at)+(x-at)\varphi(x-at)}{2x}+\frac{1}{2ax}\int_{x-at}^{x+at}\alpha\psi(\alpha)d\alpha$$

解的物理意义： $f(x-at)$表示右行波(或右传播波、正行波)，$f(x+at)$表示左行波(或左传播波、逆行波)，$u(x,t)$表示沿x轴正、负方向传播的行波，其中前一项来源于初始位移$\varphi(x)$,后一项来源于初始速度$\psi(x)$.

三、特殊函数部分(共 **15** 分**)**

1、（7 分） $P_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}=\sin\theta$.

2、（8 分）

$$\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}P_2^2(\cos\theta)\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi=\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi$$