

西北师范大学物理与电子工程学院  
2007 届本科毕业生《数学物理方法》课程补考试卷

系别：\_\_\_\_\_ 专业：\_\_\_\_\_ 级别：\_\_\_\_\_ 班级：\_\_\_\_\_

学号：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 总分 |
|----|---|---|---|----|
| 分数 |   |   |   |    |

请考生注意：以下各题需写出主要解答步骤，请保持卷面整洁。

**一、复变函数部分(共 30 分)**

1. (7 分) 已知复数  $z = 1 + i$ ，请求出复数  $z$  的实部  $u$ 、虚部  $v$ 、模  $|z|$ 、主幅角  $\arg z$ ，并用三角形、指数形式、几何形式(复平面)分别表示复数  $z$ 。

2. (5 分) 计算  $(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2})$ 。

3. (8 分) 试证  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在  $z$  平面上解析，且  $f'(z) = f(z)$ 。

4. (5 分) 计算围线积分  $\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{z+i} dz$ 。

5. (5 分) 将  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  在  $|z| < 1$  内展成罗朗级数。

**二、数学物理方程部分(共 60 分)**

1. (10 分) 在经典数学物理方程中，以二阶线性偏微分方程为主要研究对象。请问二阶线性偏微分方程从数学上分为哪几类？在物理上分别对应于什么过程？并写出各类方程的标准形式。

2. (10 分) 一根长为  $l$  的均匀柔质轻弦，左端点固定，右端点自由，作微小的自由横振动。它的初始位移为  $\sin \frac{\pi x}{l}$ ，初始速度为 0。请写出此弦振动满足的定解问题(不需求解)。

3. (25 分) 用分离变量法求解热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 & (t \geq 0). \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

要求写出完整过程.

4、(15 分) 用行波法(达朗贝尔解法)求解无限长弦的自由横振动并说明解的物理意义. 设弦的初始位移为  $\sin x$ , 初始速度为 0.

### 三、特殊函数部分(共 10 分)

求解常微分方程的本征值问题时, 会得到各种各样的特殊函数, 诸如 Legendre(勒让德)多项式、Bessel(贝塞耳)函数、Hermite(厄密)多项式和 Laguerre(拉盖尔)多项式等.

对连带Legendre多项式, 请填空(每空2分):

$l$  阶连带Legendre微分方程的一般形式为\_\_\_\_\_,  
其中有两个本征值  $l(l+1)$  和  $m$ .  $l$  的取值范围为\_\_\_\_\_,  
相应  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.  $l$  阶连带Legendre微分方程的解为  $l$  阶连带Legendre多项式, 连带Legendre多项式的\_\_\_\_\_性、  
\_\_\_\_\_性和完备性是使它成为一个坐标函数系的三个重要性质.