

西北师范大学物理与电子工程学院

2006-2007学年度第一学期《数学物理方法》期末试卷(B卷)

系别:_____专业:_____级别:_____班级:_____

学号:_____姓名:_____任课教师:_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、(10分) 长为 l 的弦在 $x = 0$ 端固定, 另一端 $x = l$ 自由, 且在初始时刻 $t = 0$ 时处于水平状态, 初始速度为 $x(l - x)$, 作微小横振动. 试写出此定解问题.

二、(5分) 今有偏微分方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_x$, 其中 b 为已知常数. 作代换 $u = e^{\beta x} v$, 问 β 取何值时可消去方程中的一阶导数项.

三、(10分) 如果 $u_1(x, t)$, $u_2(y, t)$ 分别是下述两个定解问题

$$\begin{cases} u_{1t} = a^2 u_{1xx} \\ u_1(x, 0) = \varphi_1(x) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} u_{2t} = a^2 u_{2yy} \\ u_2(y, 0) = \varphi_2(y) \end{cases} \quad \text{的解, 则 } u(x, y, t) = u_1(x, t)u_2(y, t) \text{ 是}$$

$$\text{定解问题} \begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \\ u(x, y, 0) = \varphi_1(x)\varphi_2(y) \end{cases} \quad \text{的解, 试证之.}$$

$$\text{四、(10分) 求解本征值问题} \begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}.$$

五、(30分) 分离变量法是求解定解问题的重要方法之一. 请问分离变量法对定解问题有什么要求? 分离变量法有哪些基本步骤? 关键的步骤是什么? 请用分离变量法求解如下热传导方程的混合问题(要求写出完整的求解过程).

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

六、(15分)一根无限长的弦,其振动满足如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\varepsilon u_t - \varepsilon^2 u & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

请求解该定解问题,并说明解的物理意义(提示:令 $v(x, t) = e^{-\varepsilon t} u(x, t)$).

七、(10分)请用镜像法求出Laplace方程上半平面Dirichlet问题的格林函数,并说明其物理意义.同时请写出Laplace方程上半平面Dirichlet问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (y > 0, -\infty < x < \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

解的积分公式.

八、(10分)对Legendre多项式,请填空(每空2分):

l 阶Legendre微分方程的一般形式为_____.

其中 $l(l+1)$ 为本征值. l 的取值范围为_____.

l 阶Legendre微分方程的解为_____, Legendre多项式的_____性、_____性

和完备性是使它成为一个坐标函数系的三个重要性质.

西北师范大学物理与电子工程学院

2006-2007学年度第一学期《数学物理方法》期末试卷(B卷)

参考答案

一、(10分)

二、(5分)

三、(10分)

四、(10分)

五、(30分)

分离变量法要求定解问题的泛定方程与边界条件必须是齐次的. 分离变量法其基本步骤为: 1、变量分离; 2、求解本征值问题; 3、求解另外的常微分方程; 4、特解的叠加; 5、利用定解条件确定叠加系数. 分离变量法关键的步骤是求解本征值问题.

1. 变量分离

设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入泛定方程得
$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \lambda a^2 T = 0 \end{cases}, \text{ 其中 } \lambda \text{ 为分离常数.}$$
 将 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 代入边界条件得 $X(0) = 0, X(l) = 0$.

2. 求解本征值问题
$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

本征值 $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, 本征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n \pi x}{l}, n = 1, 2, \dots$.

3. 求解常微分方程 $T' + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}T = 0, n = 1, 2, \dots$

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}t}, n = 1, 2, \dots.$$

其中 C_n 为任意常数. 得一系列特解

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}t} \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots.$$

4. 特解的叠加

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

5. 利用初始条件确定叠加系数 C_n

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \sin \frac{2\pi x}{l} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_n = 0, n \neq 2 \end{cases}.$$

所以该定解问题的解为 $u(x, t) = e^{-\frac{4\pi^2 a^2}{l^2}t} \sin \frac{2\pi x}{l}.$

六、(15分)

令 $v(x, t) = xu(x, t)$. 化原定解问题为:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ v(x, 0) = x\varphi(x) & (-\infty < x < \infty) \\ v_t(x, 0) = x\psi(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

利用D'Alembert公式, 有

$$v(x, t) = \frac{(x-at)\varphi(x-at) + (x+at)\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \alpha\psi(\alpha)d\alpha.$$

所以,

$$u(x, t) = \frac{1}{x}v(x, t) = \frac{1}{2x} \left[(x-at)\varphi(x-at) + (x+at)\varphi(x+at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} \alpha\psi(\alpha)d\alpha \right].$$

解的物理意义: $f(x-at)$ 表示右行波(或右传播波、正行波), $f(x+at)$ 表示左行波(或左传播波、逆行波), $u(x, t)$ 表示沿 x 轴正、负方向传播的行波, 其中前一项来源于初始位移 $\varphi(x)$, 后一项来源于初始速度 $\psi(x)$.

七、(10分)

Laplace方程上半平面Dirichlet问题的格林函数为:

$$G(M, M_0) = \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - g(M, M_0) = \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{1}{r_{MM_1}} \\ = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}},$$

其中 $\ln \frac{1}{r_{MM_0}} = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$ 在静电学上表示 $M_0(x_0, y_0)$ 处单位正电荷(其实指垂直于 xOy 平面穿过 $M_0(x_0, y_0)$ 点的无限长均匀直导线,其线电荷密度为一个单位)在 $M(x, y)$ 处产生的电势, $-g(M, M_0)$ 表示接地导体平面 $y=0$ 上感应负电荷在 $M(x, y)$ 处产生的电势, 其可以用镜像点 $M_1(x_0, -y_0)$ 处单位负电荷产生的电势 $-\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}}$ 来代替.

Laplace方程上半平面Dirichlet问题解的积分公式为:

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int f \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} ds \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}} \right]_{y=0} dx \\ = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx$$

八、(10分)

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0 \quad .$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$l \text{ 阶 Legendre 多项式, 即 } P_l(x) \quad .$$

$$\text{正交} \quad ,$$

$$\text{归一} \quad .$$