

西北师范大学物理与电子工程学院
2003—2004 学年度第 2 学期
《数学物理方法》课程期末考试试卷(A 卷)

系别: 物理系 专业: 物理学 级别: _____ 班级: _____
序号: _____ 姓名: _____ 任课教师: 洪学仁

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

注意: 答案一律做在答题纸上, 且各题必须写出主要步骤!

一、用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}.$$

要求写出完整过程. (25 分)

二、求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \sin x & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(x, 0) = \cos x & (-\infty < x < \infty) \end{cases}. \quad (15 \text{ 分})$$

三、一根长为 l 的均匀细杆, 它的初温为常数 u_0 , 其两端的温度保持为 0, 请写出此细杆上温度分布满足的定解问题(只写出该定解问题, 不求解). (10 分)

四、Laplace 方程在球坐标系下的形式为

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0,$$

在平面极坐标系下的形式为 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$. 试求出 Laplace 方程的球对称解和圆对称解. (10 分)

五、设在三维空间的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处有一单位正电荷, $z = 0$ 平面是接地导体, 试求 $z > 0$ 区域中的电势. (15 分)

六、写出方程 $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (2 - \frac{1}{1-x^2})y = 0$ 的解 (提示: 先确定 n, m 再写

解, $P_n(x) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^l \frac{(2n-2l)!}{2^n l!(n-l)!(n-2l)!} x^{n-2l}$, $P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(x)$, 其中 $P_n(x)$

为 n 阶 Legendre 多项式, $P_n^m(x)$ 为 n 阶连带 Legendre 多项式). (10 分)

七、已知函数 $g(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos \theta)$, 其中 $0 \leq \theta \leq \pi$,

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, A_l^m, B_l^m 为展开系数, 试求出系数 A_l^m, B_l^m . (15 分)

(提示: $\int_0^{2\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi = \pi \quad (m \neq 0)$, $\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi = \begin{cases} \pi & (m \neq 0) \\ 2\pi & (m = 0) \end{cases}$,

$$\int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} .)$$

参考答案

一、

解：1. 变量分离

设 $u(x, t) = T(t)X(x)$ ，代入泛定方程得 $\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$ ，其中 λ 为分离常数。

将 $u(x, t) = T(t)X(x)$ 代入边界条件得 $X(0) = X(l) = 0$ 。

2. 求解特征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

特征值 $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ ，特征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ ， $n = 1, 2, \dots$

3. 求解常微分方程 $T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$

$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi at}{l} + D_n \sin \frac{n\pi at}{l}$ ，其中 C_n, D_n 为任意常数。得一系列特解

$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = (C_n \cos \frac{n\pi at}{l} + D_n \sin \frac{n\pi at}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}$ ， $n = 1, 2, \dots$

4. 特解的叠加

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \frac{n\pi at}{l} + D_n \sin \frac{n\pi at}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}$

5. 利用初始条件确定叠加系数

$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow C_1 = 1, C_n = 0 (n \neq 1)$

$u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} D_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow D_2 = \frac{l}{2\pi a}, D_n = 0 (n \neq 2)$

该混合问题的解为 $u(x, t) = \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{l}{2\pi a} \sin \frac{2\pi at}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}$ 。

二、

解：利用 D'Alembert 公式 $u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$ ，这里

$\varphi(x) = \sin x, \psi(x) = \cos x$ ，得

$u(x, t) = \frac{\sin(x+at) + \sin(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\sin(x+at) - \sin(x-at)]$ 。

三、

解：该定解问题为 $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = u_0 & (0 < x < l) \end{cases}$

四、

解：1、在球坐标系下，如果 u 与 θ, φ 无关，即得球对称解满足的方程为

$$\frac{d}{dr}(r^2 \frac{du}{dr}) = 0, \text{ 积分两次可得球对称解: } u(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 (r \neq 0), \quad C_1, C_2 \text{ 为积分常}$$

数，令 $C_1 = -1, C_2 = 0$ ，可得 $u(r) = \frac{1}{r} (r \neq 0)$ 。

2、在平面极坐标系下，如果 u 与 θ 无关，即得圆对称解满足的方程为

$$\frac{d}{dr}(r \frac{du}{dr}) = 0, \text{ 积分两次可得圆对称解: } u(r) = C_1 \ln r + C_2 (r \neq 0), \quad C_1, C_2 \text{ 为积分常}$$

数，令 $C_1 = -1, C_2 = 0$ ，可得 $u(r) = \ln \frac{1}{r} (r \neq 0)$ 。

五、

解：所求 $z > 0$ 区域中的电势实际上就是上半空间的格林函数。采用镜像法，得 $z > 0$ 区域中的电势为

$$\phi(x, y, z) = G(M; M_0) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}}$$

六、

解：此方程为连带 Legendre 微分方程，这里 $n=1, m=1$ ，所以其解为

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}[P_1(x)] = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

七、

解：利用三角函数和连带 Legendre 函数的正交归一性，可得

$$A_l^0 = \frac{2l+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \varphi) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$A_l^m = \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \varphi) P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$B_l^m = \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \varphi) P_l^m(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, n, n = 0, 1, 2, \dots$$