

西北师范大学物理与电子工程学院
2004—2005 学年度第 1 学期
《数学物理方法》课程期末考试试卷(B 卷)

系别: 物理系 专业: 物理学 级别: _____ 班级: _____
序号: _____ 姓名: _____ 任课教师: 洪学仁

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

注意: 答案一律做在答题纸上, 且各题必须写出主要步骤!

一、一根长为 l 的均匀细杆, 它的初温为常数 u_0 , 其左端点保持温度为零, 右端点保持绝热. 请写出此细杆上温度分布满足的定解问题(只写出该定解问题, 不需求解). (10 分)

二、用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, u_t(x, 0) = \sin \frac{5\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}.$$

要求写出完整过程. (25 分)

三、求解无限长弦的自由横振动. 设弦的初始位移为 $\cos x$, 初始速度为 $\sin x$. (15 分)

四、已知定解问题
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

的解为 $u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$, 求下列定解问题的解

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < +\infty, t > 0) \\ u_x(0, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \psi(x) & (0 \leq x < +\infty) \end{cases}.$$

要求写出完整过程. (15 分)

五、Laplace 方程在平面极坐标系下的形式为 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$. 试求出

Laplace 方程的圆对称解. (5 分)

六、用电像法求 Laplace 方程关于右半平面 ($y > 0$) 的 Dirichlet 问题的格林函数 $G(M; M_0)$, 并说明其物理意义. (15 分)

七、写出方程 $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (6 - \frac{1}{1-x^2})y = 0$ 的解. (提示: 先确定 n, m 再

写解, $P_n(x) = \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^l \frac{(2n-2l)!}{2^n l!(n-l)!(n-2l)!} x^{n-2l}$, $P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(x)$, 其中

$P_n(x)$ 为 n 阶 Legendre 多项式, $P_n^m(x)$ 为 n 阶连带 Legendre 多项式.) (10 分)

八、已知函数 $g(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l R^l P_l(\cos \theta)$, 其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, c_l 为展开系数, R 为一常数.

试求出系数 c_l . (提示: $\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$.) (5 分)

参考答案

一、

解：该定解问题为
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = u_0 & (0 < x < l) \end{cases}.$$

解：1. 变量分离

设 $u(x, t) = T(t)X(x)$ ，代入泛定方程得
$$\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases},$$
 其中 λ 为分离常数。

将 $u(x, t) = T(t)X(x)$ 代入边界条件得 $X(0) = X(l) = 0$ 。

2. 求解特征值问题
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

特征值 $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ ，特征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ ， $n = 1, 2, \dots$

3. 求解常微分方程 $T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$

$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}$ ，其中 C_n, D_n 为任意常数。得一系列特解

$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = (C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}$ ， $n = 1, 2, \dots$

4. 特解的叠加

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

5. 利用初始条件确定叠加系数

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow C_1 = 1, C_n = 0 (n \neq 1)$$

$$u_t(x, 0) = \sin \frac{5\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} D_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow D_5 = \frac{l}{5\pi a}, D_n = 0 (n \neq 5)$$

该混合问题的解为
$$u(x, t) = \cos \frac{\pi a t}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{l}{5\pi a} \sin \frac{5\pi a t}{l} \sin \frac{5\pi x}{l}.$$

三、

解：此无限长弦的自由横振动满足的定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \cos x & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(x, 0) = \sin x & (-\infty < x < \infty) \end{cases},$$

利用 D'Alembert 公式 $u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$, 这里

$\varphi(x) = \cos x, \psi(x) = \sin x$, 得

$$u(x,t) = \frac{\cos(x+at) + \cos(x-at)}{2} - \frac{1}{2a} [\cos(x+at) - \cos(x-at)]$$

四、

解: 对初值函数 $\psi(x)$ 作偶式开拓, 构造一个在 $(-\infty, \infty)$ 上新的初值函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \geq 0) \\ \psi(-x) & (x < 0) \end{cases},$$

从而将原半无限问题开拓成初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ U(x, 0) = \varphi(x) \end{cases},$$

其解为 $U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi$, 且 $U_x(x,0) = 0$. 因此当 $x \geq 0$ 时, $U(x,t)$

就是所求的 $u(x,t)$. $\Rightarrow$ 原定解问题的解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \psi(-\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}} \right] d\xi \end{aligned}$$

五、

解: 在平面极坐标系下, 如果 u 与 θ 无关, 即得圆对称解满足的方程为

$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0$, 积分两次可得圆对称解: $u(r) = C_1 \ln r + C_2 (r \neq 0)$, C_1, C_2 为积分常数, 令 $C_1 = -1, C_2 = 0$, 可得 $u(r) = \ln \frac{1}{r} (r \neq 0)$.

六、

解: 采用电像法, 可得 Laplace 方程关于右半平面 ($y > 0$) 的 Dirichlet 问题的格林函数: $G(M; M_0) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}}$. 其中

$\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$ 表示通过点 $M_0(x_0, y_0)$ 的无限长均匀荷电直导线在点

$M(x, y)$ 处产生的电势, $-\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}}$ 表示接地导体上 ($y=0$) 感应负

电荷在点 $M(x, y)$ 处产生的电势, 此电势可以用通过点 $M_1(x_0, -y_0)$ (点 $M_1(x_0, -y_0)$ 为点 $M_0(x_0, y_0)$ 关于直线 $y=0$ 的镜像点) 的无限长均匀荷电直导线产生的电势来代替.

七、

解: 此方程为连带 Legendre 微分方程, 这里 $n=2, m=1$, 所以其解为

$$P_2^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}[P_2(x)] = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

八、

解: 利用 Legendre 多项式的正交归一性, 可得

$$c_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^\pi g(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$