

西北师范大学物理与电子工程学院  
2004—2005 学年度第 1 学期  
《数学物理方法》课程期末考试试卷(A 卷)

系别： 物理系 专业： 物理学 级别： \_\_\_\_\_ 班级： \_\_\_\_\_  
序号： \_\_\_\_\_ 姓名： \_\_\_\_\_ 任课教师： 洪学仁

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 分数 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**注意：答案一律做在答题纸上，且各题必须写出主要步骤！**

一、一根长为  $l$  的均匀柔质轻弦，左端点固定，右端点自由，作微小的自由横振动，它的初始位移为  $\sin \frac{\pi x}{2l}$ ，初始速度为  $\sin \frac{3\pi x}{2l}$ 。请写出此弦振动满足的定解问题(只写出该定解问题，不求解)。 (10 分)

二、用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

要求写出完整过程。 (25 分)

三、求解无限长弦的自由横振动。设弦的初始位移为  $\sin x$ ，初始速度为  $\cos x$ 。(15 分)

四、已知定解问题 
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

的解为  $u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$ ，求下列定解问题的解

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < +\infty, t > 0) \\ u(0, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \psi(x) & (0 \leq x < +\infty) \end{cases}.$$

要求写出完整过程. (15 分)

五、Laplace 方程在球坐标系下的形式为

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0,$$

试求出 Laplace 方程的球对称解. (5 分)

六、用电像法求 Laplace 方程关于上半空间 ( $z > 0$ ) 的 Dirichlet 问题的格林函数  $G(M; M_0)$ , 并说明其物理意义. (15 分)

七、写出方程  $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (2 - \frac{1}{1-x^2})y = 0$  的解. (提示: 先确定  $n, m$  再

写解,  $P_n(x) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^l \frac{(2n-2l)!}{2^n l!(n-l)!(n-2l)!} x^{n-2l}, P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(x)$ , 其中

$P_n(x)$  为  $n$  阶 Legendre 多项式,  $P_n^m(x)$  为  $n$  阶连带 Legendre 多项式. ) (10 分)

八、已知函数  $f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta)$ , 其中  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $c_n$  为展开系数, 试求出系数  $c_n$ .

(提示:  $\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$ . ) (5 分)

## 参考答案

一、

解：该定解问题为 
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{2l} & (0 < x < l) \end{cases}$$

二、

解：1. 变量分离

设  $u(x, t) = T(t)X(x)$ ，代入泛定方程得  $\begin{cases} T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$ ，其中  $\lambda$  为分离常数。

将  $u(x, t) = T(t)X(x)$  代入边界条件得  $X(0) = X(l) = 0$ 。

2. 求解特征值问题  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

特征值  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ ，特征函数  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ ， $n = 1, 2, \dots$

3. 求解常微分方程  $T'(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$

$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t}$ ，其中  $C_n$  为任意常数。得一系列特解

$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$ ， $n = 1, 2, \dots$

4. 特解的叠加

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

5. 利用初始条件确定叠加系数

$$u(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow C_2 = 1, C_n = 0 (n \neq 2)$$

该混合问题的解为  $u(x, t) = e^{-\frac{4\pi^2}{l^2} a^2 t} \sin \frac{2\pi x}{l}$ 。

三、

解：此无限长弦的自由横振动满足的定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \sin x & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(x, 0) = \cos x & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

---

利用 D'Alembert 公式  $u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$ , 这里

$\varphi(x) = \sin x, \psi(x) = \cos x$ , 得

$$u(x,t) = \frac{\sin(x+at) + \sin(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\sin(x+at) - \sin(x-at)]$$

四、

**解:** 对初值函数  $\psi(x)$  作奇式开拓, 构造一个在  $(-\infty, \infty)$  上新的初值函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \geq 0) \\ -\psi(-x) & (x < 0) \end{cases},$$

从而将原半无限问题开拓成初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ U(x, 0) = \varphi(x) \end{cases},$$

其解为  $U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi$ , 且  $U(x,0) = 0$ . 因此当  $x \geq 0$  时,  $U(x,t)$

就是所求的  $u(x,t)$ .  $\Rightarrow$  原定解问题的解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \psi(-\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}} \right] d\xi \end{aligned}.$$

五、

**解:** 在球坐标系下, 如果  $u$  与  $\theta, \varphi$  无关, 即得球对称解满足的方程为  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0$ ,

积分两次可得球对称解:  $u(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 (r \neq 0)$ ,  $C_1, C_2$  为积分常数, 令

$C_1 = -1, C_2 = 0$ , 可得  $u(r) = \frac{1}{r} (r \neq 0)$ .

六、

**解:** 采用电像法, 可得 Laplace 方程关于上半空间 ( $z > 0$ ) 的 Dirichlet 问题的格林函数:

$$G(M; M_0) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}}.$$

其中  $\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$  表示上半空间  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  点处单位正电荷在

点  $M(x, y, z)$  处产生的电势,  $-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}$  表示接地导体板上

( $z=0$ ) 感应负电荷在点  $M(x, y, z)$  处产生的电势, 此电势可以用点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  关于  $z=0$  平面的镜像点  $M_1(x_0, y_0, -z_0)$  处单位负电荷产生的电势来代替.

七、

解: 此方程为连带 Legendre 微分方程, 这里  $n=1, m=1$ , 所以其解为

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}[P_1(x)] = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

八、

解: 利用 Legendre 多项式的正交归一性, 可得

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$