

西北师范大学物理与电子工程学院
2004—2005 学年度第 2 学期
《数学物理方法》 课程期末考试试卷(B 卷)

系别: 物理系 专业: 物理学 级别: _____ 班级: _____
序号: _____ 姓名: _____ 任课教师: 洪学仁

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								

一、填空题 (每空 2 分, 共 30 分)

1. 在数学上, 人们把二阶线性偏微分方程分为三类, 分别称之为双曲型方程、抛物型方程和椭圆型方程. 波动方程可以作为研究_____型方程的模型, 热传导方程可以作为研究_____型方程的模型, Laplace 方程可以作为研究_____型方程的模型.

2. 《数学物理方程》课程的基本任务一般包括两个方面: 一方面是将具体的物理问题转化为数学问题, 即导出定解问题, 另一方面是求解适定的定解问题. 定解问题包括 泛定方程和_____条件. 定解问题解的存在性、_____性和_____性统称为定解问题的适定性.

3. 分离变量法是求解数学物理方程的基本方法之一. 该方法要求泛定方程和边界条件必须是_____的, 其中求解_____问题是分离变量法的关键.

4. Laplace 方程的基本解在求解 Laplace 方程中起着重要作用, Laplace 方程的基本解包括球对称解和圆对称解. Laplace 方程的球对称解满足的方程为_____, 圆对称解满足的方程为_____.

5. 格林函数 (点源影响函数) $G(M, M_0) = \frac{1}{r_{MM_0}} - g(M; M_0)$ 在静电学上是指_____

6. Legendre 多项式的_____性、_____性和完备性是使它成为一个坐标函数系的三个重要性质.

7. 连带 Legendre 微分方程 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0$ 与自然边界条件 $y|_{x=\pm 1} = \text{有界}$ 构成本征值问题, 相应的本征值为_____, 本征函数为_____.

请考生注意: 以下各题必须写出主要步骤!

二、一根长为 l 的均匀细杆, 两端点固定, 作微小的自由纵振动, 它的初始位移为 $\sin \frac{\pi x}{l}$, 初始速度为 $\sin \frac{2\pi x}{l}$. 请写出此杆纵振动满足的定解问题(只写出该定解问题, 不需求解). (10 分)

三、用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

要求写出完整过程. (20 分)

四、求解无限长弦的自由横振动. 设弦的初始位移为 $\cos x$, 初始速度为 $\sin x$. (10 分)

五、已知定解问题 $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$

的解为 $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi$, 求下列定解问题的解

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < +\infty, t > 0) \\ u_x(0,t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x,0) = \psi(x) & (0 \leq x < +\infty) \end{cases}.$$

要求写出完整过程. (15 分)

六、用电像法求 Laplace 方程关于上半平面 ($y > 0$) 的 Dirichlet 问题的格林函数 $G(M; M_0)$. (10 分)

七、已知函数 $f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta)$, 其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, c_n 为展开系数, 试求出系数 c_n .

(提示: $\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$, 其中 $P_n(x)$ 为 n 阶 Legendre 多项式.) (5 分)

参考答案

一、填空题 (每空 2 分, 共 30 分)

1. 双曲; 抛物; 椭圆.

2. 定解; 唯一; 稳定.

3. 齐次; 特征值.

4. $\frac{1}{r^2}(r^2 \frac{du}{dr}) = 0$; $\frac{1}{r}(r \frac{du}{dr}) = 0$

5. 区域 D 内 M_0 处单位正电荷及其在接地导体面 S 上感应负电荷在 M 点产生的电势的叠加.

6. 正交; 归一.

7. $n(n+1), (n=0,1,2,\dots)$; $P_n^m(x)$

二、

解: 该定解问题为
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} & (0 < x < l) \end{cases}.$$

三、

解: 1. 变量分离

设 $u(x, t) = T(t)X(x)$, 代入泛定方程得 $\begin{cases} T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$, 其中 λ 为分离常数. 将 $u(x, t) = T(t)X(x)$ 代入边界条件得 $X(0) = X(l) = 0$.

2. 求解特征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

特征值 $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, 特征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

3. 求解常微分方程 $T'(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$

$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}$, 其中 C_n 为任意常数. 得一系列特解

$$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. 特解的叠加

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

5. 利用初始条件确定叠加系数

$$u(x,0) = \sin \frac{\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow C_1 = 1, C_n = 0 (n \neq 1)$$

$$\text{该混合问题的解为 } u(x,t) = e^{-\frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

四、

解：此无限长弦的自由横振动满足的定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \cos x & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(x,0) = \sin x & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

利用 D'Alembert 公式 $u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$ ，这里

$\varphi(x) = \cos x, \psi(x) = \sin x$ ，得

$$u(x,t) = \frac{\cos(x+at) + \cos(x-at)}{2} - \frac{1}{2a} [\cos(x+at) - \cos(x-at)]$$

五、

解：对初值函数 $\psi(x)$ 作偶式开拓，构造一个在 $(-\infty, \infty)$ 上新的初值函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \geq 0) \\ \psi(-x) & (x < 0) \end{cases},$$

从而将原半无限问题开拓成初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases},$$

其解为 $U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$ ，且 $U(x,0) = 0$ 。因此当 $x \geq 0$ 时， $U(x,t)$

就是所求的 $u(x,t)$ 。 $\Rightarrow$ 原定解问题的解

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \psi(-\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \\
 &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}} \right] d\xi.
 \end{aligned}$$

六、

解：采用电像法，可得 Laplace 方程关于上半平面($y > 0$)的 Dirichlet 问题的格林函

数：
$$G(M; M_0) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}}$$

七、

解：利用 Legendre 多项式的正交归一性，可得

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$