

西北师范大学物理与电子工程学院
2004—2005 学年度第 2 学期
《数学物理方法》课程期末考试试卷(A 卷)

系别： 物理系 专业： 物理学 级别： _____ 班级： _____
序号： _____ 姓名： _____ 任课教师： 洪学仁

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								

一、填空题 (每空 2 分, 共 30 分)

1. 《数学物理方程》课程的基本任务一般包括两个方面：一方面是将具体的物理问题转化为数学问题，即导出定解问题，另一方面是求解适定的定解问题. 定解问题包括_____方程和定解条件. _____条件和_____条件都称为定解条件. 定解问题解的_____性、唯一性和_____性统称为定解问题的适定性.
2. 《数学物理方程》研究了 3 种典型的物理过程：波动过程、传输和扩散过程、稳定场过程. _____过程可以作为研究双曲型方程的物理模型, _____过程可以作为研究抛物型方程的物理模型, _____过程可以作为研究椭圆型方程的物理模型.
3. Laplace 方程的基本解在求解 Laplace 方程中起着重要作用, Laplace 方程的基本解包括球对称解和圆对称解. Laplace 方程的球对称解为_____, 圆对称解为_____.
4. Laplace 方程关于空间区域 D 上 Dirichlet 问题的格林函数（又称点源影响函数）为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{r_{MM_0}} - g(M; M_0), \text{ 其在静电学上是指 } \underline{\hspace{2cm}}$$

5. 分离变量法是求解数学物理方程的基本方法之一. 该方法要求泛定方程和边界条件必须是_____的, 其中求解_____问题是分离变量法的关键.

6. Legendre 微分方程 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$ 与自然边界条件 $y|_{x=\pm 1} = \text{有界}$ 构成本征值问题, 相应的本征值为_____, 本征函数为_____.

请考生注意: 以下各题必须写出主要步骤!

二、一根长为 l 的均匀细杆, 它的初温为常数 u_0 , 其两端的温度保持为 0. 请写出此细杆上温度分布满足的定解问题(只写出该定解问题, 不求解). (10 分)

三、用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u_t(x, 0) = 0 & (0 \leq x \leq l) \end{cases}.$$

要求写出完整过程. (20 分)

四、求解无限长弦的自由横振动. 设弦的初始位移为 $\sin x$, 初始速度为 $\cos x$. (10 分)

五、已知定解问题
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

的解为 $u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$, 求下列定解问题的解

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < +\infty, t > 0) \\ u(0, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \psi(x) & (0 \leq x < +\infty) \end{cases}.$$

要求写出完整过程. (15 分)

六、用电像法求 Laplace 方程关于上半空间 ($z > 0$) 的 Dirichlet 问题的格林函数 $G(M; M_0)$. (10 分)

七、已知函数 $f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n^m(\cos \theta)$, 其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, c_n 为展开系数, 试求出系数 c_n .

(提示: $\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1}$, 其中 $P_n^m(x)$ 为 n 阶连带 Legendre 多项式.) (5 分)

参考答案

一、填空题 (每空 2 分, 共 30 分)

1. 泛定; 边界(或边值); 初始(或初值); 存在; 稳定.

2. 波动; 传输和扩散; 稳定场.

3. $\frac{1}{r}$; $\ln \frac{1}{r}$

4. 区域 D 内 M_0 处单位正电荷及其在接地导体面 S 上感应负电荷在 M 点产生的电势的叠加.

5. 齐次; 特征值.

6. $n(n+1)$, $(n=0,1,2,\dots)$; $P_n(x)$

二、

解: 该定解问题为
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = u_0 & (0 < x < l) \end{cases}.$$

三、

解: 1. 变量分离

设 $u(x, t) = T(t)X(x)$, 代入泛定方程得 $\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$, 其中 λ 为分离常

数. 将 $u(x, t) = T(t)X(x)$ 代入边界条件得 $X(0) = X(l) = 0$.

2. 求解特征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

特征值 $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, 特征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

3. 求解常微分方程 $T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$

$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}$, 其中 C_n, D_n 为任意常数. 得一系列特解

$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = (C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

4. 特解的叠加

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}$

5. 利用初始条件确定叠加系数

$$u(x,0) = \sin \frac{\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow C_1 = 1, C_n = 0 (n \neq 1)$$

$$u_t(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} D_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow D_n = 0$$

$$\text{该混合问题的解为 } u(x,t) = \cos \frac{\pi a t}{l} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

四、

解：此无限长弦的自由横振动满足的定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \sin x & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(x,0) = \cos x & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

利用 D'Alembert 公式 $u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$ ，这里

$\varphi(x) = \sin x, \psi(x) = \cos x$ ，得

$$u(x,t) = \frac{\sin(x+at) + \sin(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\sin(x+at) - \sin(x-at)]$$

五、

解：对初值函数 $\psi(x)$ 作奇式开拓，构造一个在 $(-\infty, \infty)$ 上新的初值函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \geq 0) \\ -\psi(-x) & (x < 0) \end{cases},$$

从而将原半无限问题开拓成初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases},$$

其解为 $U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$ ，且 $U(x,0) = 0$ 。因此当 $x \geq 0$ 时， $U(x,t)$

就是所求的 $u(x,t)$ 。 $\Rightarrow$ 原定解问题的解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \psi(-\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi \end{aligned}$$

六、

解：采用电像法，可得 Laplace 方程关于上半空间 ($z > 0$) 的 Dirichlet 问题的格林函数： $G(M; M_0) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}}$

七、

解：利用连带 Legendre 多项式的正交归一性，可得

$$c_n = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$