

西北师范大学物理与电子工程学院
函授教育 2006 年暑期数学物理方法课程考试试卷(B)

班级: _____ 学号: _____

姓名: _____ 任课教师: _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

一、填空题 (每空 2 分, 共 30 分)

1. 设一静电场的复位势为 $w(z) = 2qi \ln \frac{1}{z}$, 其中 $z = re^{i\theta}$, q 为电荷线密度, 则电力线方程为 _____, 等势线方程为 _____.
2. 双边幂级数在 _____ 内可以逐项求导或逐项积分.
3. 对任意定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数 $\varphi(x)$, 有 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x - \xi) dx =$ _____.
4. Hamilton 算子 ∇ 与 Laplace 算子 Δ 之间的关系是 _____.
5. 弦振动方程的形式为 _____, 一维热传导方程的形式为 _____, 三维 Laplace 方程的形式为 _____.
6. 定解问题满足条件: ① _____、② _____、③ _____, 则称该解问题是适定的.
7. 方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的通解是 _____.
8. Legendre 多项式的 _____ 性、 _____ 性和完备性是使它成为一个坐标函数系的三个重要性质.

9. 球函数是指_____方程的解.

请考生注意：以下各题必须写出主要步骤！

二、(10 分)已知 $u = x^3 - 3xy^2$ ，且 $f(0) = 0$ ，求解析函数 $f(z) = u + iv$.

三、(5 分)计算积分 $\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{z+i} dz$.

四、(5 分)求函数 e^z 在 $z = 0$ 点的泰勒展式.

五、(10 分)求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \sin x, u_t(x, 0) = 0, (-\infty < x < +\infty) \end{cases}.$$

六、(20 分)用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \end{cases},$$

要求写出完整过程.

七、(10 分) Laplace 方程在球坐标系下的形式为

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0. \text{ 试求出 Laplace 方程的}$$

球对称解(提示: u 与 θ, φ 无关).

八、(10 分)请你结合自己的学习体会, 谈谈《数学物理方法》这门课程的基本内容以及在专业学习中的重要性.

参考答案

一、填空题 (每空 2 分, 共 30 分)

1. $\theta = \text{常数}, r = \text{常数}$.
2. 收敛环.
3. $\varphi(\xi)$.
4. $\Delta = \nabla \bullet \nabla = \nabla^2$.
5. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.
6. 解存在、解唯一、解稳定.
7. 方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的通解是 $u = f_1(x - at) + f_2(x + at), f_1(x - at), f_2(x + at)$ 为具有二阶连续偏导数的两个任意函数.
8. 正交、归一.
9. 连带 Legendre.

二、(10 分)

解: 1、曲线积分法

$$\because dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad \underline{\underline{C-R \text{条件}}} - \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy,$$

$$\therefore v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy + C = \int_{(0,0)}^{(x,0)} 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy$$

$$+ \int_{(x,0)}^{(x,y)} 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy + C$$

$$= \int_{(x,0)}^{(x,y)} (3x^2 - 3y^2) dy + C = 3x^2 y - y^3 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\therefore f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3 + C) = z^3 + iC$$

$$\text{又} \because f(0) = 0, \therefore C = 0, \text{ 因此 } f(z) = z^3.$$

2、不定积分法

$$\because \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \therefore \text{由 C-R 条件得: } \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

对 $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$ 两边取不定积分可得, $v = \int (3x^2 - 3y^2) dy = 3x^2 y - y^3 + \varphi(x)$, 因

此 $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \varphi'(x)$

又 $\because \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \therefore \varphi(x) = C, v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + C$

$\therefore f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3 + C) = z^3 + iC$

又 $\because f(0) = 0, \therefore C = 0$, 因此 $f(z) = z^3$.

三、(5 分) 根据 Cauchy 积分公式, 有 $\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{z+i} dz = 2\pi i e^{iz} \big|_{z=-i} = 2\pi i e$.

四、(5 分) 根据 Taylor 定理, $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(e^z)^{(n)}}{n!} \big|_{z=0} = \frac{1}{n!}$,

$$\therefore e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \cdots + \frac{1}{n!} z^n + \cdots, |z| < +\infty.$$

五、(10 分) 解: 利用 D'Alembert 公式 $u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$, 这

里 $\varphi(x) = \sin x, \psi(x) = 0$, 得 $u(x, t) = \frac{\sin(x+at) + \sin(x-at)}{2}$

六、(20 分)

解: 1. 变量分离

设 $u(x, t) = T(t)X(x)$, 代入泛定方程得 $\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$, 其中 λ 为分离常数. 将

$u(x, t) = T(t)X(x)$ 代入边界条件得 $X(0) = X(l) = 0$.

2. 求解特征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

特征值 $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, 特征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \cdots$

3. 求解常微分方程 $T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$

$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}$, 其中 C_n, D_n 为任意常数. 得一系列特解

$$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = (C_n \cos \frac{n\pi at}{l} + D_n \sin \frac{n\pi at}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. 特解的叠加

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \frac{n\pi at}{l} + D_n \sin \frac{n\pi at}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

5. 利用初始条件确定叠加系数

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow C_1 = 1, C_n = 0 (n \neq 1)$$

$$u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} D_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow D_2 = \frac{l}{2\pi a}, D_n = 0 (n \neq 2)$$

$$\text{该混合问题的解为 } u(x, t) = \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{l}{2\pi a} \sin \frac{2\pi at}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

七、(10 分)

解：在球坐标系下，如果 u 与 θ, φ 无关，即得球对称解满足的方程为 $\frac{d}{dr}(r^2 \frac{du}{dr}) = 0$ ，积

分两次可得球对称解： $u(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 (r \neq 0)$ ， C_1, C_2 为积分常数，令 $C_1 = -1, C_2 = 0$ ，

可得 $u(r) = \frac{1}{r} (r \neq 0)$ 。

八、(10 分) 略。