

西北师范大学物理与电子工程学院
函授教育 2006 年暑期数学物理方法课程考试试卷(A)

班级: _____ 学号: _____

姓名: _____ 任课教师: _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								

一、填空题 (每空 2 分, 共 30 分)

1. 设 $z = 1 + i\sqrt{3}$, 则 $|z| =$ _____, $\arg z =$ _____, $\operatorname{Arg} z =$ _____,

三角形形式为 _____, 指数形式为 _____.

2. 设一静电场的复位势为 $w(z) = z^2$, 其中 $z = x + iy$, 则电力线方程为 _____,

等势线方程为 _____.

3. 幂级数在 _____ 内可以逐项求导或逐项积分.

4. 对任意定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数 $\varphi(x)$, 有 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x) dx =$ _____.

5. 弦振动方程属于 _____ 型方程, 热传导方程属于 _____ 型方程, 拉

普拉斯方程属于 _____ 型方程.

6. 本征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$ 的本征值是 _____, 本征函数

是 _____.

7. 球函数方程的解称为_____.

请考生注意：以下各题必须写出主要步骤！

二、(10 分)已知 $u = 3x^2y - y^3$ ，且 $f(0) = 0$ ，求解析函数 $f(z) = u + iv$.

三、(15 分) 将函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在以下区域内展成 Laurent 级数.

1. $0 < |z-1| < 1$

2. $0 < |z-2| < 1$

3. $|z| < 1$

四、(10 分)求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x, 0) = A \sin \omega x, (-\infty < x < +\infty) \\ u_t(x, 0) = 0, (-\infty < x < +\infty) \end{cases}.$$

五、(20 分)用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

要求写出完整过程.

六、(10 分) Laplace 方程在平面极坐标系下的形式为 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$. 试求出

Laplace 方程的圆对称解(提示: u 与 θ 无关).

七、(5 分)已知函数 $f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta)$, 其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, c_n 为展开系数. 试求出系数

c_n . (提示: $\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$, 其中 $P_n(x)$ 为 n 阶 Legendre 多项式.)

参考答案

一、填空题 (每空 2 分, 共 30 分)

1. $2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, z = 2 \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$

2. $x^2 - y^2 = \text{常数}, 2xy = \text{常数}.$

3. 收敛圆.

4. $\varphi(0).$

5. 双曲, 抛物, 椭圆.

6. $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, n = 1, 2, 3, \dots, X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, 3, \dots.$

7. 连带 Legendre 多项式.

二、(10 分)

解: 1、曲线积分法

$$\because dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad \underline{\underline{C-R \text{条件}}} - \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = (3y^2 - 3x^2)dx + 6xydy,$$

$$\therefore v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3y^2 - 3x^2)dx + 6xydy + C = \int_{(0,0)}^{(x,0)} (3y^2 - 3x^2)dx + 6xydy$$

$$+ \int_{(x,0)}^{(x,y)} (3y^2 - 3x^2)dx + 6xydy + C$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (-3x^2)dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} 6xydy + C = -x^3 + 3xy^2 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\therefore f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 3x^2y - y^3 + i(-x^3 + 3xy^2 + C) = -iz^3 + iC$$

$$\text{又} \because f(0) = 0, \therefore C = 0, \text{ 因此 } f(z) = -iz^3.$$

2、不定积分法

$$\because \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy, \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2, \therefore \text{由 C-R 条件得: } \frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2, \frac{\partial v}{\partial y} = 6xy$$

$$\text{对 } \frac{\partial v}{\partial y} = 6xy \text{ 两边取不定积分可得 } v = \int 6xydy = 3xy^2 + \varphi(x), \text{ 因此 } \frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2 + \varphi'(x)$$

$$\text{又} \because \frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2 \Rightarrow \varphi'(x) = -3x^2 \therefore \varphi(x) = -x^3 + C, v(x, y) = 3xy^2 - x^3 + C$$

$$\therefore f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 3x^2y - y^3 + i(-x^3 + 3xy^2 + C) = -iz^3 + iC$$

$$\text{又} \because f(0) = 0, \therefore C = 0, \text{ 因此 } f(z) = -iz^3.$$

三、(15 分)

$$\text{解: } f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$1. \quad 0 < |z-1| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n - \frac{1}{z-1}$$

$$2. \quad 0 < |z-2| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n$$

$$3. \quad |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

四、(10 分)

$$\text{解: 利用 D'Alembert 公式 } u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, \text{ 这里}$$

$$\varphi(x) = A \sin \omega x, \psi(x) = 0, \text{ 得 } u(x, t) = \frac{A \sin \omega(x+at) + A \sin \omega(x-at)}{2}.$$

五、(20 分)

解: 1. 变量分离

$$\text{设 } u(x, t) = T(t)X(x), \text{ 代入泛定方程得 } \begin{cases} T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}, \text{ 其中 } \lambda \text{ 为分离常数. 将}$$

$$u(x, t) = T(t)X(x) \text{ 代入边界条件得 } X(0) = X(l) = 0.$$

$$2. \text{ 求解特征值问题 } \begin{cases} X''(x) + \lambda(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\text{特征值 } \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \text{ 特征函数 } X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$3. \text{ 求解常微分方程 } T'(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$$

$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}$, 其中 C_n 为任意常数. 得一系列特解

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. 特解的叠加

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n \pi x}{l}$$

5. 利用初始条件确定叠加系数

$$u(x, 0) = \sin \frac{2 \pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n \pi x}{l} \Rightarrow C_2 = 1, C_n = 0 (n \neq 2)$$

$$\text{或 } C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{2 \pi x}{l} \sin \frac{n \pi x}{l} dx \Rightarrow C_2 = 1, C_n = 0 (n \neq 2)$$

该定解问题的解为 $u(x, t) = e^{-\frac{4 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{2 \pi x}{l}$.

六、(10 分)

解: 在平面极坐标系下, 如果 u 与 θ 无关, 即得圆对称解满足的方程为 $\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0$, 积分

两次可得圆对称解: $u(r) = C_1 \ln r + C_2 (r \neq 0)$, C_1, C_2 为积分常数, 令 $C_1 = -1, C_2 = 0$,

可得 $u(r) = \ln \frac{1}{r} (r \neq 0)$.

七、(5 分)

解: 利用 Legendre 多项式的正交归一性, 可得

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$