西北师范大学物理与电子工程学院

2006-2007学年度第一学期《数学物理方法》期末试卷(A卷)

系别:______________专业：______________级别：_________班级：_________

学号：__________________姓名：__________________任课教师：____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	**总分**
得分									

一、(10分) 在经典数学物理方程中, 以二阶线性偏微分方程为主要研究对象. 请问二阶线性偏微分方程从数学上分为哪几类? 在物理上分别对应于什么过程? 并写出各类方程的标准形式.

二、(10分) 数学物理方程有两大基本任务: 导出定解问题和求解相应的定解问题. 请问什么是定解问题? 定解问题包括哪些要素? 我们学习了哪些定解问题? 以及求解这些定解问题的主要方法有哪些?

三、(10分) 定解问题的适定性对于导出定解问题和求解定解问题具有重要的指导意义. 请问什么是定解问题的适定性? 适定性包括哪些方面? 并从物理角度分析如下定解问题是不适定的(提示:可以从温度场或静电场出发, 解可能不存在).

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad (f \neq 0) \qquad (\text{在区域}D\text{内}) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0 \qquad (S\text{为区域}D\text{的边界}, n\text{为边界}S\text{的外法线方向}) \end{cases}$$

四、(5分) 一根长为l 的均匀细杆, 其温度分布满足如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \qquad (t \geq 0) \\ u(x,0) = 200 \qquad (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

不求解定解问题, 从物理角度直观分析细杆上温度随时间的变化情况, 并考察$t \to +\infty$ 时细杆上的温度.

五、(30分)分离变量法是求解定解问题的重要方法之一. 请问分离变量法对定解问题有什么要求？分离变量法有哪些基本步骤？关键的步骤是什么？请用分离变量法求解如下弦振动方程的混合问题(要求写出完整的求解过程), 并分析解的物理意义.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x,0) = sin\dfrac{2\pi x}{l}, u_t(x,0) = 0 & (0 \leq x \geq l) \end{cases}$$

六、(15分)一根无限长的均匀细杆, 其振动满足如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + \dfrac{2}{x}u_x) & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

其中$\varphi(x)$, $\psi(x)$为充分光滑的已知函数. 请求解该定解问题, 并说明解的物理意义(提示: 令$v(x,t) = xu(x,t)$) .

七、(10分)格林函数又称点源影响函数, 请用镜像法求出Laplace方程上半空间Dirichlet问题的格林函数, 并说明其物理意义. 同时请写出Laplace方程上半空间Dirichlet问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (z > 0, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty) \\ u(x,y,0) = f(x,y) & (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty) \end{cases}$$

解的积分公式.

八、(10分)求解常微分方程的本征值问题时, 会得到各种各样的特殊函数, 诸如Legendre(勒让德)多项式、Bessel(贝塞耳)函数、Hermite(厄密)多项式

和Laguerre(拉盖尔)多项式等.

对连带Legendre多项式, 请填空(每空2分):

l 阶连带Legendre微分方程的一般形式为____, 其中有两个本征值$l(l+1)$ 和m. l 的取值范围为______________, 相应m 的取值范围为______________. l 阶连带Legendre微分方程的解为l阶连带Legendre多项式, 连带Legendre多项式的__________性、__________性和完备性是使它成为一个坐标函数系的三个重要性质.

西北师范大学物理与电子工程学院

2006-2007学年度第一学期《数学物理方法》期末试卷(A卷)

参考答案

一、(10分)

二阶线性偏微分方程从数学上分为双曲型、抛物型、椭圆型三类, 在物理上, 双曲型方程对应于波动过程, 抛物型方程对应于传输和扩散过程, 椭圆型方程对应于稳定场过程. 双曲型方程的标准形式为$u_{tt} - a^2\Delta u = f$, 抛物型方程的标准形式为$u_t - a^2\Delta u = f$, 椭圆型方程的标准形式为$\Delta u = f$.

二、(10分)

物理问题在数学上的完整提法是：在给定的定解条件下, 求解数学物理方程. 数学物理方程加上相应的定解条件就构成定解问题.

定解问题包括泛定方程和定解条件. 物理规律用偏微分方程表达出来, 叫作数学物理方程. 数学物理方程, 作为同一类物理现象的共性, 反映的是矛盾的普遍性, 与具体条件无关, 是解决问题的依据, 所以又称为泛定方程. 定解条件包括边界条件和初始条件, 有时还需要衔接条件. 边界条件和初始条件反映了具体问题特定的环境和历史, 即矛盾的特殊性. 泛定方程提供解决问题的依据, 定解条件提出具体的物理问题, 泛定方程和定解条件作为一个整体, 合称为定解问题.

学习的定解问题有: **对波动过程**: 针对有界弦, 提出了弦振动方程的混合问题; 针对无界弦, 提出了弦振动方程的初值问题(或Cauchy问题). **对传输和扩散过程**: 针对有界杆, 提出了热传导方程的混合问题; 针对无界杆, 提出了热传导方程的初值问题; 针对一端有界的杆, 提出了热传导方程的半无限问题. **对稳定场过程**: 提出了Laplace方程圆、球、半空间、半平面的Dirichlet问题.

求解这些定解问题的主要方法有: 分离变量法(有界空间、无界空间、极坐标系、球坐标系)、Fourier级数法(齐次泛定方程、非齐次泛定方程)、行

波解法(或D’Alembert解法)、冲量定理法、格林函数法(波动、热传导、镜像法)等.

三、(10分)

定解问题是对真实的物理问题经过一定的近似后得到的, 近似就涉及到是否合理的问题, 即定解问题是否提的正确, 这一问题称为定解问题的适定性.

定解问题的适定性包括解的存在性、解的唯一性和解的稳定性三个方面.

该定解问题如果从温度场来考虑, 反映的是这样一种温度场：区域D 内存在热源, 而边界上是绝热的. 热源不停的放出热量, 而热量又不能经由边界散发出去, D 内的温度必然要不停的升高, 其温度分布不可能是稳定的, 故该问题不能由Possion方程来描述, 因此该定解问题的解是不存在的. 从而该定解问题是不适定的.(注: 从静电场分析类似, 只不过内部有电荷分布, 而电场的法向分量为零.)

四、(5分)

从该定解问题可以看出：杆的左端温度为0, 右端绝热, 杆内部没有热源, 杆上初始时刻各处温度均为常数200. 根据热传导规律, 杆上的温度将随时间降低, 越靠近左端, 温度降得越快, 最后当$t \to +\infty$ 时细杆的温度将和左端的温度相等, 即杆上各处的温度均为0.

五、(30分)

分离变量法要求定解问题的泛定方程与边界条件必须是齐次的. 分离变量法其基本步骤为：1、变量分离; 2、求解本征值问题; 3、求解另外的常微分方程; 4、特解的叠加; 5、利用定解条件确定叠加系数. 分离变量法关键的步骤是求解本征值问题.

1. 变量分离

设$u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入泛定方程得$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + \lambda a^2 T = 0 \end{cases}$, 其中$\lambda$ 为分离常数. 将$u(x,t) = X(x)T(t)$代入边界条件得$X(0) = 0, X(l) = 0$.

2. 求解本征值问题$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0, X(l)=0 \end{cases}$

本征值$\lambda_n=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$, 本征函数$X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $n=1,2,\cdots$.

3. 求解常微分方程$T''+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T=0$, $n=1,2,\cdots$

$T_n(t)=C_n\cos\dfrac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\dfrac{n\pi a}{l}t$, $n=1,2,\cdots$.

其中C_n, D_n为任意常数. 得一系列特解

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,\cdots.$$

4. 特解的叠加

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

5. 利用初始条件确定叠加系数C_n, D_n

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\sin\frac{2\pi x}{l}\Longrightarrow\begin{cases} C_2=1 \\ C_n=0, n\neq 2 \end{cases}.$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=0\Longrightarrow D_n=0, n=1,2,\cdots.$$

所以该定解问题的解为$u(x,t)=\cos\dfrac{2\pi a}{l}t\sin\dfrac{2\pi x}{l}$.

解的物理意义：该Fourier级数解在物理上表示驻波.

六、(15分)

令$v(x,t)=xu(x,t)$. 化原定解问题为：

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx} & (-\infty<x<\infty, t>0) \\ v(x,0)=x\varphi(x) & (-\infty<x<\infty) \\ v_t(x,0)=x\psi(x) & (-\infty<x<\infty) \end{cases}$$

利用D'Alembert公式, 有

$$v(x,t)=\frac{(x-at)\varphi(x-at)+(x+at)\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\alpha\psi(\alpha)d\alpha.$$

所以,

$$u(x,t)=\frac{1}{x}v(x,t)=\frac{1}{2x}\left[(x-at)\varphi(x-at)+(x+at)\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\alpha\psi(\alpha)d\alpha\right].$$

解的物理意义：$f(x-at)$表示右行波(或右传播波、正行波), $f(x+at)$ 表示左行波(或左传播波、逆行波), $u(x,t)$ 表示沿x 轴正、负方向传播的行波, 其中前一项来源于初始位移$\varphi(x)$, 后一项来源于初始速度$\psi(x)$.

七、(10分)

Laplace方程上半空间Dirichlet问题的格林函数为：

$$G(M,M_0)=\frac{1}{r_{MM_0}}-g(M,M_0)=\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}},$$

其中$\frac{1}{r_{MM_0}}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$在静电学上表示$M_0(x_0,y_0,z_0)$处单位正电荷在$M(x,y,z)$处产生的电势, $-g(M,M_0)$表示接地导体平面$z=0$上感应负电荷在$M(x,y,z)$ 处产生的电势, 其可以用镜像点$M_1(x_0,y_0,-z_0)$处单位负电荷产生的电势$-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}$来代替.

Laplace方程上半空间Dirichlet问题解的积分公式为：

$$u(x_0,y_0,z_0)=-\frac{1}{4\pi}\int\int f\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}dS=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$
$$\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]_{z=0}dx\,dy$$
$$=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}dxdy$$

八、(10分)

$\underline{\quad(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0\quad}$.

$\underline{\quad l=0,1,2,3,\cdots\quad}$,

$\underline{\quad m=0,1,2,\cdots,l\quad}$.

<u>　　正交　　</u>、

<u>　　归一　　</u>.