一类直纹面的研究

王如山　　　　张　样

(安徽师范大学, 芜湖 241000)　(南京师范大学, 南京 210097)

摘要　本文给出了过任意空间 $C^k\,(k\geq 3)$ 类光滑曲线的直纹面是可展曲面的充要条件. 同时得到了该空间曲线为相应直纹面的曲率线, 测地线和渐近曲线的充要条件.

关键词　可展曲面　曲率线　测地线　渐近曲线

在文[1]中有如下结果:

引理　过给定空间曲线 Γ 的一族法线构成可展曲面的充要条件是法线上的单位向量 $e(s) = N(s)\cos\theta(s) + B(s)\sin\theta(s)$ 满足: $\mathring{\theta}(s) + \tau(s) = 0$, 其中 $\tau(s)$ 为 Γ 的挠率, $\theta(s)$ 为沿 $T(s)$ 的反向看, $N(s)$ 到 $e(s)$ 的有向角.

本文首先考虑直母线方向 $e(s)$ 为任意的直纹面 Σ: $X(s,t) = Y(s) + te(s)$, 得到了比引理更为一般的如下结果:

定理 1　过给定 $C^k\,(k\geq 3)$ 类光滑曲线 Γ: $Y = Y(s)$ (s 为自然参数) 的直纹面 Σ 的方程为:

$$X(s,t) = Y(s) + te(s)$$

($e(s) = \cos\alpha(s)T(s) + \cos\beta(s)N(s) + \cos\gamma(s)B(s)$ 为直母线方向上的单位向量), 则 Σ 为可展曲面的充要条件是 Σ 为 Γ 的切线曲面, 或 Σ 的直母线方向上的方向余弦满足:

$$\left(\frac{\cos\beta(s)}{\cos\gamma(s)}\right)' - \tau(s)\left(1 + \left(\frac{\cos\beta(s)}{\cos\gamma(s)}\right)^2\right) + \kappa(s)\frac{\cos\alpha(s)}{\cos\gamma(s)} = 0. \qquad (*)$$

证　设 $C^k\,(k\geq 3)$ 类光滑曲线 Γ: $Y = Y(s)$ (s 为自然参数) 上任一点处的 Frenet 标架为 $\{Y(s), T(s), N(s), B(s)\}$, 利用 Frenet 公式可得:

$$\begin{aligned}\mathring{e}(s) = {} & (-\sin\alpha(s)\cdot\mathring{\alpha}(s) - \kappa(s)\cos\beta(s))T(s) + (-\sin\beta(s)\cdot\mathring{\beta}(s) + \kappa(s)\cos\alpha(s) \\ & - \tau(s)\cos\gamma(s))N(s) + (-\sin\gamma(s)\cdot\mathring{\gamma}(s) + \tau(s)\cos\beta(s))\cdot B(s).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}(Y'(s), e(s), \mathring{e}(s)) = (T(s)\times e(s))\cdot\mathring{e}(s) = {} & \cos\gamma(s)\sin\beta(s)\cdot\mathring{\beta}(s) - \cos\beta(s)\sin\gamma(s)\cdot\mathring{\gamma}(s) \\ & - \tau(s)(\cos^2\beta(s) + \cos^2\gamma(s)) - \kappa(s)\cos\alpha(s)\cos\gamma(s).\end{aligned}$$

令 $(Y'(s), e(s), \mathring{e}(s)) = 0$ 知:

若 $\cos\gamma = 0$, 即 $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ 时, 有 $\tau(s)\cos^2\beta(s) = 0$, 得 $\tau(s) = 0$ 或 $\beta = \dfrac{\pi}{2}$; 若 $\cos\gamma \neq 0$, 则关系式 $(*)$ 成立. 不难进一步知[1], 定理 1 的结论正确.

下面来讨论几种特殊情形.

当直母线位于曲线 Γ 在各点处的密切平面上时, 此时 $\cos\gamma = 0$. 由定理 1 有:

推论 1　当直母线位于曲线 Γ 在各点处的密切平面上时,

(Ⅰ) 若 Γ 为平面光滑曲线, 则相应的直纹面 Σ 为可展(此时 Σ 就是 Γ 所在的平面).

(Ⅱ) 若 Γ 为空间光滑曲线, 则相应的直纹面 Σ 为可展的充要条件为 Σ 是 Γ 的切线曲面

收稿日期: 1998-03-06

当直母线位于曲线 Γ 在各点处的从切面上时, 此时 $\cos\beta=0$. 再选取直母线上与 B 正向同侧的方向为 e 的正向. 设 $(\widehat{e, T})=\theta$, $(0\leq\theta<\pi)$, 则 $\alpha=\theta$, $\gamma=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. 由定理1有:

推论2 设直母线位于空间光滑曲线 Γ (非直线) 在各点处的从切面上, 则相应的直纹面 Σ 为可展的充要条件为 Σ 是 Γ 的切线平面或满足 $\mathrm{tg}\theta=\frac{\tau}{\kappa}$, $(\theta=(\widehat{T, e}), 0\leq\theta<\pi)$.

当直母线位于曲线 Γ 在各点处的法平面上时, 此时 $\cos\alpha=0$. 再选取直母线上与 B 正向同侧的方向为 e 的正向. 设 $(\widehat{e, N})=\theta$ $(0\leq\theta<\pi)$, 则 $\beta=\theta$, $\gamma=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. 由定理1有:

推论3 设直母线位于空间光滑曲线 Γ 在各点处的法平面上, 则相应的直纹面 Σ 为可展的充要条件是 $\dot{\theta}(s)+\tau(s)=0$.

推论3就是本文开始所叙述的引理.

由上述分析, 我们可得出进一步的结果:

定理2 过空间 $C^k(k\geq3)$ 类光滑曲线 Γ: $Y=Y(s)$ (s 为自然参数) 的直纹面为 Σ:

$$X(s, t)=Y(s)+te(s)$$

($e(s)=\cos\alpha(s)T(s)+\cos\beta(s)N(s)+\cos\gamma(s)B(s)$ 为直母线方向的单位向量), 则 Γ 为 Σ 的曲率线的充要条件是 Σ 为 Γ 的切线曲面, 或 Γ 是平面曲线, 其中 $e(s)$ 为从切面上任一单位向量, 或满足:

$$\frac{\cos\gamma(s)}{\cos\beta(s)}-\frac{\cos\gamma(s_0)}{\cos\beta(s_0)}=\mathrm{tg}\left(-\int_0^s\tau(s)\,ds\right)\quad (s_0>0\text{ 为任意常数}).\quad (**)$$

证 直纹面 Σ 上单位法向量 $n(s, t)=\frac{X_s\times X_t}{|X_s\times X_t|}$, 其中 $X_s=T(s)+t\dot{e}(s)$, $X_t=e(s)$. 特别地, 沿曲线 Γ 时, $n(s)=n(s, 0)=\frac{T(s)\times e(s)}{|T(s)\times e(s)|}$. 由文[1, 2]知, $\Gamma\subset\Sigma$ 为曲率线的充要条件是 Σ 的法线曲面

$$\Sigma^*: X^*(s, t)=Y(s)+t(T(s)\times e(s))=Y(s)+t(-N(s)\cos\gamma(s)+B(s)\cos\beta(s))$$

可展. 而由

$$\begin{aligned}(Y'(s), T(s)\times e(s), (T(s)\times e(s))')&=\tau(s)(\cos^2\beta(s)+\cos^2\gamma(s))+\cos\beta(s)(\cos\gamma(s))'\\&\quad-\cos\gamma(s)(\cos\beta(s))'\\&=0\end{aligned}$$

知, 若 $\cos\beta(s)=0$, 则 $\tau(s)\cos^2\gamma(s)=0$; 若 $\cos\beta(s)\neq0$, 则

$$\left(\frac{\cos\gamma(s)}{\cos\beta(s)}\right)'+\tau(s)\left(1+\left(\frac{\cos\gamma(s)}{\cos\beta(s)}\right)^2\right)=0.$$

由此可得, 关系式(**)成立. 定理2证毕.

利用上述方法, 还可得到如下结果(证略):

定理3 过空间 $C^k(k\geq3)$ 类光滑曲线(非直线) Γ: $Y=Y(s)$ (s 为自然参数) 的直纹面为 Σ:

$$X(s, t)=Y(s)+te(s)$$

($e(s)=\cos\alpha(s)T(s)+\cos\beta(s)N(s)+\cos\gamma(s)B(s)$ 为直母线方向的单位向量), 则

(Ⅰ) $\Gamma\subset\Sigma$ 为渐近曲线的充要条件是 $e(s)$ 位于 Γ: $Y=Y(s)$ 上每点处的密切平面上.

(Ⅱ) $\Gamma\subset\Sigma$ 为测地线的充要条件是 $e(s)$ 位于 Γ: $Y=Y(s)$ 上每点处的从切平面上.

参 考 文 献

1 吴大任主编. 微分几何讲义. 高等教育出版社, 北京, 1980

2 W. Klingenberg, A Course in Differential Geometry, Springer-Verlag, New York, 1983

The Research for a Class of Ruled Surface

Wang Rushan　Zhang Yang
(Anhui Normal University, Wuhu 241000)

Abstract In this paper, we establish a necessary and sufficient condition for a constructed ruled surface containing a prescribed smooth space curve of C^k-class ($k \geq 3$) to be developable surface. And also we get a series of necessary and sufficient conditions of the space curve to be a line of curvature, geodesics, and asymptotic line of corresponding ruled surface.

Key words developable surface, line of curvature, geodesic, asymptotic line.