附录 B

向量函数及其运算

B.1 向量代数

在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的有序点对集 $\{(P,Q) \mid P,Q \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 中建立一个如下等价关系 $\sim$: 称

$$(P,Q) \sim (P',Q'),$$

如果存在平移 T, 使得

$$T(P) = P', \quad T(Q) = Q'.$$

设 P,Q,P',Q' 的坐标分别为 (x_i,y_i,z_i), (x_i',y_i',z_i'), $i=1,2$, 则

$$(P,Q) \sim (P',Q') \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = x_2' - x_1' \\ y_2 - y_1 = y_2' - y_1' \\ z_2 - z_1 = z_2' - z_1' \end{cases} \tag{B.1}$$

上述等价关系的一个等价类称为一个**向量**. (P,Q) 的等价类, 即从 P 到 Q 的向量记为 $\overrightarrow{PQ}$, 它的三个**分量**定义为 x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, 即有

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

根据 (B.1) 式, 一个向量由其分量完全确定. 从几何上说, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ 当且仅当

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{P'Q'}|,$$

且

$$\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{P'Q'} \ (\text{同方向意义下}).$$

设 $P \in \mathbb{R}^3$, 称 $\overrightarrow{OP}$ 为 P 的**位置向量或径矢**.

若 λ 为实数, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, 则定义 λ 与 $\boldsymbol{r}$ 之积为 $\lambda \cdot \boldsymbol{r} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. 若 $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$, 为两个向量, 则定义它们的和是 $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. 于是, 向量在上述加法和数乘运算下构成一个向量空间.

(I) **两个向量的内积**: $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

向量的模长: $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

向量的单位化: 设 $\boldsymbol{r} \neq 0$, 则 $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ 是和 $\boldsymbol{r}$ 方向相同的单位向量.

两个向量的夹角: $\cos \angle(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1| \cdot |\boldsymbol{r}_2|}$.

正交向量: $\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{r}_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = 0$.

内积的交换律: $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_2$.

(II) **两个向量的外积**: $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$.

共线向量: $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 共线(或平行) $\Longleftrightarrow \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = 0$.

外积的反交换律: $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = -\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_1$.

(III) **三个向量的混合积**: $(r_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \cdot \boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

共面向量: $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ 共面 $\Longleftrightarrow (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = 0$.

混合积的轮换与交换律: 轮换不改变混合积, 交换使混合积变号.

右(左)手标架: $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3\}$ 成右(左)手标架 $\Longleftrightarrow (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) > 0 (< 0)$,

(IV) **三个向量的双重向量积**: $(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3 = (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2 - (\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_1$.

Lagrange 恒等式:

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \cdot (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_4) = (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_4) - (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_4).$$

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_4) = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_4)\boldsymbol{r}_3 - (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_4.$$

(V) **$\mathbb{R}^3$ 的运动不改变向量的模长和夹角.**

B.2 向量函数的极限

若对应于 $a \le t \le b$ 中的每一个 t 值, 有一个确定的向量 $\boldsymbol{r}$, 则称 $\boldsymbol{r}$ 为的一个**向量函数**, 记为 $\boldsymbol{r}(t)$. 显然向量函数的三个分量都是 t 的函数, 即

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \le t \le b.$$

若 $x(t), y(t), z(t)$ 关于 t 有直到 k 阶的连续导数, 我们就称向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 为 C^k **阶向量函数**. 特别当 $x(t), y(t), z(t)$ 是 t 的连续函数时, 称 $\boldsymbol{r}(t)$ 是**连续向量函数**.

设 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. 如果成立

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0,$$

则称当 t 趋于 t_0 时, $\boldsymbol{r}(t)$ 的极限为 $\boldsymbol{r}_0$, 记为

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0.$$

不难证明上式等价于

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0| = 0.$$

容易证明向量函数的极限具有如下性质:

$$\lim_{t \to t_0} \lambda(t)\boldsymbol{r}(t) = \lim_{t \to t_0} \lambda(t) \cdot \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t);$$
$$\lim_{t \to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)] = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) + \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t);$$
$$\lim_{t \to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t) \cdot \boldsymbol{r}_2(t)] = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \cdot \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t);$$
$$\lim_{t \to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t)] = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \times \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t).$$

B.3 向量函数的微分

设向量函数 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$, 若极限

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \triangle t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\triangle t}, \quad t_0 \in [a, b]$$

存在, 则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 为**在 t_0 是可导的**, 这个极限称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 的**导向量**, 记为 $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}$ 或 $\boldsymbol{r}'(t_0)$:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0} = \boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

从极限的定义出发, 容易证明下式成立:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0} = \boldsymbol{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

若 $\boldsymbol{r}(t)$ 对 $[a,b]$ 中每一个 t 值都是可导的, 则它称为在 $[a,b]$ **上是可导的**.

不难验证以下的微分公式:

$$\begin{aligned}
&(\lambda\boldsymbol{r})' = \lambda'\boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{r}'; \qquad (\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' + \boldsymbol{r}_2';\\
&(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}_1'\cdot\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2'; \qquad (\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2';\\
&(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)' = (\boldsymbol{r}_1',\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3) + (\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2',\boldsymbol{r}_3) + (\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3').
\end{aligned}$$

向量函数 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 微分的定义与普通函数一样:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t)dt = (dx(t), dy(t), dz(t)).$$

对复合函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $t = \phi(u)$, 则可以验证:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{du} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{du} = \boldsymbol{r}'(t)\phi'(u).$$

若向量函数是两个或更多变量的函数(即它的分量是两个或更多变量的函数)时, 类似于普通数量函数的偏导数, 可以得到**偏导向量**的概念. 例如, 设 $\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, 则有

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \qquad \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

对于复合向量函数 $\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $u = u(\bar{u},\bar{v})$, $v = v(\bar{u},\bar{v})$, 则成立链式法则:

$$\boldsymbol{r}_{\bar{u}} = \boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial\bar{u}} + \boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}, \qquad \boldsymbol{r}_{\bar{v}} = \boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial\bar{v}} + \boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}.$$

B.4 向量函数的积分

设向量函数$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 则$\boldsymbol{r}(t)$的**不定积分**是

$$\int \boldsymbol{r}(t)dt=\left(\int x(t)dt,\int y(t)dt,\int z(t)dt\right).$$

由此, 对常数λ和常向量$\boldsymbol{r}_0$, 不难验证下列公式:

$$\begin{aligned}
&\int \lambda\boldsymbol{r}(t)dt=\lambda\int \boldsymbol{r}(t)dt;\\
&\int [\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]dt=\int \boldsymbol{r}_1(t)dt+\int \boldsymbol{r}_2(t)dt;\\
&\int \boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{r}_0\cdot\int \boldsymbol{r}(t)dt;\\
&\int \boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{r}_0\times\int \boldsymbol{r}(t)dt.
\end{aligned}$$

同样可以定义向量函数$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$的**定积分**:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt=\left(\int_a^b x(t)dt,\int_a^b y(t)dt,\int_a^b z(t)dt\right).$$

于是关于数量函数的定积分的许多性质都可以立即推广到向量函数. 特别地, 若$\boldsymbol{f}'(t)=\boldsymbol{r}(t)$, 则

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a).$$