附录 C

对称线性变换与特征值

C.1 线性变换与特征值

假定V是n维实向量空间. 在V中取定一个基底$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, 则$V$中的任意一个成员$v$能够唯一地表示成

$$v = v^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v^n\boldsymbol{e}_n. \tag{C.1}$$

所谓向量空间V的一个**线性变换**f是指从V到它自身的一个映射$f: V \to V$, 满足下列条件:

(1) 对于任意的u, $v \in V$, 有$f(u+v) = f(u) + f(v)$;

(2) 对于任意的$v \in V$和$\lambda \in \mathbb{R}$, 有$f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

由此可见, 当向量v表示成(C.1)式时, 我们有

$$f(v) = v^1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + v^2 f(\boldsymbol{e}_n), \tag{C.2}$$

因此线性变换f是由它在各个基底向量$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$上的值$f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(e_n)$来确定. 设

$$f(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \boldsymbol{e}_j, \tag{C.3}$$

其中a_i^j是实数, 它们构成矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}. \tag{C.4}$$

通常, 称 A 为线性变换 f 在基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下的矩阵. 此时, (C.3) 式可以写成

$$f\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}, \tag{C.5}$$

并且 (C.2) 式成为

$$f(v) = \begin{pmatrix}v^1 & \cdots & v^n\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}. \tag{C.6}$$

如果存在实数 λ 以及非零向量 v, 使得

$$f(v) = \lambda v, \tag{C.7}$$

则称 λ 是线性变换 f 的**特征值**, 并且称 v 是它的**特征向量**. 按照 (C.6), (C.7) 式成为

$$f(v) = \begin{pmatrix}v^1 & \cdots & v^n\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}v^1 & \cdots & v^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}v^1 & \cdots & v^n\end{pmatrix}\cdot A = \lambda\begin{pmatrix}v^1 & \cdots & v^n\end{pmatrix}. \tag{C.8}$$

用 I 表示 $n\times n$ 单位矩阵, 则 (C.8) 式成为

$$\begin{pmatrix}v^1 & \cdots & v^n\end{pmatrix}\cdot(\lambda I - A) = 0. \tag{C.9}$$

这是关于未知数 $v^1, \cdots, v^n$ 的线性方程组, 其系数矩阵是 $\lambda I - A$. 根据克莱姆法则, 线性方程组 $(C.9)$ 有非零解 $(v^1, \cdots, v^n)$ 的充分必要条件是它的系数矩阵的行列式为零, 即

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda - a_1^1 & \cdots & -a_1^n\\ \vdots & & \vdots\\ -a_n^1 & \cdots & \lambda - a_n^n\end{vmatrix} = 0. \tag{C.10}$$

这是关于未知数 λ 的 n 次方程. 根据代数基本定理, 它在复数域上有 n 个根. 这意味着, 一般来说, 线性变换 f 的特征值是复数; 相应地用复特征值 λ 代入线性方程组 (C.9), 得到的解 $(v^1,\cdots,v^n)$ 也是由复数组成的, 因此线性变换 f 的特征向量, 一般来说, 是基底向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的复线性组合.

取 (C.8) 式的复共扼, 则得

$$(\overline{v^1},\cdots,\overline{v^n})\cdot A=\overline{\lambda}(\overline{v^1},\cdots,\overline{v^n}).$$

这就是说, 如果 λ 是线性变换 f 的特征值, v 为相应的特征向量, 那么 $\overline{\lambda}$ 也是线性变换 f 的特征值, 并且对应的特征向量是 $\overline{v}$.

C.2 对称线性变换与特征值

设 V 是 n 维实向量空间. 如果在 V 上给定了一个对称正定的双线性函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\ V\times V\to\mathbb{R}$, 则称 $(V,\ \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个 n 维**欧氏向量空间**, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 称为**内积**.

设 f 是欧氏向量空间 $(V,\ \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上的一个线性变换. 如果对于任意的 $u,\ v\in V$ 都有

$$\langle f(u),v\rangle=\langle u,f(v)\rangle, \tag{C.11}$$

则称 f 是欧氏向量空间 V 上的**对称线性变换**, 也称为**自共扼线性变换**.

定理 C.1 对称线性变换的特征值都是实数, 相应的特征向量是基底的实系数线性组合.

证明 设 λ 是对称线性变换 f 的特征值, v 是相应的特征向量, 于是 $\overline{\lambda}$ 也是线性变换 f 的特征值, 并且相应的特征向量是 $\overline{\lambda}$. 根据自共扼的条件 (C.11) 得到

$$\lambda\langle v,\overline{v}\rangle=\langle f(v),\overline{v}\rangle=\langle v,f(\overline{v})\rangle=\overline{\lambda}\langle v,\overline{v}\rangle,$$

故

$$(\lambda-\overline{\lambda})\langle v,\overline{v}\rangle=0. \tag{C.12}$$

对非零向量 v, 熟知 $\langle v,\overline{v}\rangle>0$, 于是由 (C.12) 式立即得到 $\lambda=\overline{\lambda}$, 即特征值 λ 是实数. 用实特征值 λ 代入线性方程组 (C.9), 得到的解 $(v^1,\cdots,v^n)$ 也是由实数组成的. 因此, 对称线性变换 f 的特征向量是基底的实系数线性组合. □

定理 C.2 对称线性变换的两个不同特征值相应的特征向量是彼此正交的.

证明 设 $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, $f(v_2) = \lambda_2 v_2$, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 由线性变换 f 的对称性, $\langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle$, 即 $\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$, 或 $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle = 0$. 由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 因此 $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, 等价地说, v_1 和 v_2 彼此正交. □

定理 C.3 设 f 是 n 维欧氏向量空间 V 上的对称线性变换, 则它必然有 n 个实特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 并且相应地有 n 个彼此正交的单位特征向量 $v_1, \cdots, v_n$, 它们构成 V 的单位正交基底.

证明 首先, 对称线性变换 f 的特征值都是实数, 设 λ_1 是它的一个实特征值, 对应的单位特征向量为 v_1. 令

$$V_1 = \{u \in V \mid \langle u, v_1\rangle = 0\},$$

则 V_1 是 $(n-1)$ 维欧氏向量空间, 并且线性变换 f 在 V_1 上的作用是封闭的, 同时 f 在 V_1 上的限制 $f_1 = f|_{V_1}$ 仍然是对称线性变换. 接着, 对欧氏向量空间 V_1 和对称线性变换 f_1 重复上面的过程. 最终, 我们便得到定理所要求的结论. □