

微分几何的曲线论教学中应注意的几个问题

齐邦交

(天水师范学院 数理与信息科学学院, 甘肃 天水 741001)

摘要:在微分几何的曲线论教学中应注意强调或补充:应将曲线 $r=r(t)$, $a < t < b$ 视为函数而不是象的集合;微分几何中的曲线与数学分析、解析几何中的曲线的联系;曲线的自然参数表示;独立的不变量 s, k, τ .

关键词:曲线;向量函数;象;自然参数;不变量

中图分类号:O186.1

文献标识码:A

文章编号:1371-1351(2005)02-0008-02

曲线论是微分几何研究的主要对象之一。本文根据教科书^[1]结合近年来的教学实际,认为在教学中应强调或补充以下几个问题:

1 应将曲线 $r=r(t)$, $a < t < b$ 视为函数而不是象的集合^[2]

关于曲线的概念[1]中是这样说的:如果一个开的直线段到三维欧氏空间内建立的对应是一一的,双方连续的在上映射(这种映射称为拓扑映射或同胚),则我们把三维欧氏空间中的映射的象称为简单曲线段。

基于此,加之[1]没有给出更多地说明,因而不 少初学者认为曲线是象的集合,其实不然。

例 1.1 曲线 $r_1(t)=\{t,0,0\}$, $r_2(t)=\{t^3,0,0\}$, $-\infty < t < +\infty$ 的象都是 x 轴,显然它们都是简单曲线,但它们的长度 $s_1=\int_0^t dt=t$, $s_2=\int_0^t 3t^2 dt=t^3$ ($t \neq 0$), $s_1 \neq s_2$,因而它们不是同一曲线。

可见,我们应将曲线视为向量函数,即具有直观和抽象的两种属性,而不应看成象的集合。这样做,我们就可以将曲线视为一个质点在空间中运动,即一个时空函数, $r=r(t)$, 而不同的运动可以留下相同的轨迹。

定义 如果曲线的参数表达式

$$r=r(t) \quad a < t < b$$

中的函数是一阶连续可微的函数,且具有 $r'(t) \neq 0$ ($a < t < b$), 则称此曲线是正则曲线。

例 1.2 曲线 $r_1(t)=\{t, 0, 0\}$, $r_2(t)=\{t^3+1, 0, 0\}$, $t \in (-\infty, +\infty)$ 的象都是 x 轴,且都是简单曲

线。但因 $r_1'(t)=\{1, 0, 0\}$, $r_2'(t)=\{3t^2, 0, 0\}$, 所以 $r_1(t)$ 是正则曲线,而 $r_2(t)$ 不是正则曲线。这也表明把曲线视为函数而不是象的集合。

由此还可看到,三维欧氏空间内同一点集可以表示为不同的参数曲线。

2 微分几何中的曲线与数学分析、解析几何中的曲线的联系

在数学分析、解析几何中所接触到的曲线,有的本身是参数曲线(即方程是参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $a < t < b$)。要么总可以进行适当的局部参数化。

例 2.1 函数 $(-1 < x < 1)$ 在平面直角坐标系 xoy 下表示以原点为圆心的上半开单位圆周。若半开单位圆周用向量参数表示,可写为 $r=\{t, \sqrt{1-t^2}\}$, $t \in (-1, 1)$;也可写成 $r=\{\cos \theta, \sin \theta\}$, $\theta \in (0, \pi)$ 。

例 2.2 在直角坐标系下,圆柱面与球面的交线的上半叶写成向量参数表示为:

$$r=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t}\right\}, t \in (0, 2\pi)$$

强调并补充这点可使 学生联系以前学过的有关曲线的知识,而且感觉到参数曲线并不陌生,进而加强对参数曲线的理解。

3 曲线的自然参数表示

曲线 $r=r(t)$, $a < t < b$ 的自然参数表示 $r=r(s)$, 其切向量是单位向量,便于理论研究,在简化计算的同时,能突出所讨论对象的几何意义。但值得注意

的是应告诉学生：实际上要作出有些曲线的弧长是有困难的！

其一是，有些曲线的弧长 $s=s(t)=\int_0^t |r'(t)| dt$ 可能不是初等函数。

例 3.1 $r=\{2\sin t, \cos t, 0\}, t \in (0, 2\pi), r'(t)=\{2\cos t, -\sin t, 0\}, s(t)=\int_0^t \sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t} dt$ 不能积出。

其二是，即使 $s=s(t)$ 能求出，但它的反函数有可能求不出。

例 3.2 $r=\{t, \frac{t^2}{2}, 0\}, -\infty < t < +\infty, r'(t)=\{1, t, 0\}$, 则

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} [t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})]$$

从这个方程，要找出 $t=t^{-1}(s)$ 是极其困难的。

但这些并不重要，问题在于能肯定曲线的弧长存在就行了。这时可向学生介绍正则曲线的弧长一定存在，即正则曲线存在自然参数表示，其证明可略。

4 独立的不变量(不变形式) s, k, τ

曲线论的基本定理，充分显示了曲线的曲率 k 、挠率 τ 的重要性，而且我们知道讨论有关曲线、曲面的参数变换下的不变形式是微分几何的主要方法。因此在教学中应强调补充 s, k, τ 是独立的不变量。

在曲线 $r=r(t)$ 的一阶微分邻域内得到弧长 s 是积分不变量，在二阶微分邻域内得到曲率 k 是微分不变量，在三阶微分邻域得到挠率 τ 是微分不变量。即 s, k, τ 在参数变换下是不变的，在刚体运动下也是不变的，教学中可对前者加以简单证明或布置作业让学生自己完成。

4.1 弧长 s 在参数变换下是不变的

证明：设 P_0, P 是正则曲线 $r=r(t)$ 上两点，其参数分别为 t_0, t ，令 $s(t)$ 是曲线从 t_0 到 t 的弧长。设参数变换为 $t=t^*(t^*)$ ， $\frac{dt}{dt^*} \neq 0$ ，不妨设 $\frac{dt}{dt^*} > 0$ 。此时曲线的方程为 $r=r(t(t^*))$ ， P_0, P 点的参数分别为 t_0^*, t^* ，令 $s^*(t^*)$ 为曲线从 t_0^* 到 t^* 的弧长。则

$$s^*(t^*) = \int_{t_0^*}^{t^*} \left| \frac{dr}{dt^*} \right| dt^* = \int_{t_0^*}^{t^*} \left| \frac{dr}{dt} \frac{dt}{dt^*} \right| dt^* = \int_{t_0}^t \left| \frac{dr}{dt} \right| dt = s(t)$$

故弧长 s 只依赖于曲线上点 P_0, P 的选择而与参数

的选择无关。

4.2 曲率 k 、挠率 τ 与参数的选择无关

证明：曲线 $r=r(t) \in C^3$ 类，其参数变换为 $t=t(s)$ （这里的 s 并不一定是自然参数）， $\frac{dt}{ds} = t' \neq 0$ ，不妨设 $t' > 0$ ，此时曲线的方程为 $r=r(t(s))=r^*(s)$ ，记 r 对 t 的导数为“ $\dot{}$ ”， r 对 s 的导数为“ $\cdot$ ”，则把 $r=r^*(s)$ 的两边对 s 求导有

$$\dot{r} = r' t'$$

$$\ddot{r} = r'' t'^2 + r' t''$$

$$\dddot{r} = r''' t'^3 + 3r'' t' t'' + r' t'''$$

$$k_{r=r^*(s)} = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3} = \frac{|r' \times r''| |t'|^3}{|r' t'|^3} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3} = k_{r=r(t)}$$

$$\tau_{r=r^*(s)} = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{|\dot{r} \times \ddot{r}|^2} = \frac{(r', r'', r''') t'^6}{|r' \times r''|^2 t^{16}} = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \times r''|^2} = \tau_{r=r(t)}$$

4.3 独立的不变量仅有 s, k, τ

也就是说高于三阶的微分邻域内没有新的独立的不变量出现。

证明：设曲线的方程为 $r=r(s), C^k$ 类 ($k \geq 4$)

$$\dot{r} = \alpha$$

$$\ddot{r} = k \beta$$

$$\dddot{r} = -k^2 \alpha + k \beta + k \tau \gamma = a_3 \alpha + b_3 \beta + c_3 \gamma, \text{ 其中 } a_3, b_3, c_3 \text{ 是 } k, \tau \text{ 及其导数的函数。}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \ddot{\ddot{r}} &= a_3 \alpha + a_4 k \beta + b_3 \beta + b_4 (-k \alpha + \tau \gamma) + c_3 \gamma + c_4 (-\tau \beta) \\ &= a_4 \alpha + b_4 \beta + c_4 \gamma, \text{ 其中 } a_4, b_4, c_4 \text{ 仍是 } k, \tau \text{ 及其各阶导数的函数。} \end{aligned}$$

.....

$$(K) \quad r^{(K)} = a_K \alpha + b_K \beta + c_K \gamma, \text{ 其中 } a_K, b_K, c_K \text{ 仍是 } k, \tau \text{ 及其各阶导数的函数。故 } r^{(K)} \text{ 中没有新的独立不变量出现。}$$

参考文献：

- [1] 梅向明,黄敬之.微分几何[M].北京:高等教育出版社,2003.
- [2] 孟道骥,梁科.微分几何[M].北京:科学出版社,1999.

〔责任编辑 王三福〕

(下转第 12 页)

我们认为, 对于有两个、三个或更多叫法的数学基本概念, 应选择各名称中最能反映其本质特性的一个作为该概念的核心名称, 同时表示该概念的记号也应该唯一。有时为了让读者全面理解该概念, 其他的名字可能也需要介绍, 但核心名称必须在教科书中出现并应加以强调, 其他名称只能起辅助的作用。

全国科学技术名词审定委员会已对相当数量的数学名词进行了审定公布, 但还有更多的数学名词未经审定。我们的建议是, 对于已经公布的数学名词, 教材和专著的作者应严格遵守采用, 不宜再自行其事, 同时有关的出版部门也应把好关; 对于尚未审定公布的, 应采用相对比较权威的用法, 切忌对已有的数学概念再制造新的名称。

参考文献:

- [1] 欧阳光中, 朱学炎, 秦曾复. 数学分析[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983. 200- 202.
- [2] 江泽坚, 吴智泉, 周光亚. 数学分析[M]. 北京: 人民教育出版社, 1964. 156- 157.
- [3] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1980. 197- 198.
- [4] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. 4- 148.
- [5] 赵树源. 微积分[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1988. 168- 169.
- [6] Stanley N. Burris. Logic for Mathematics and Computer Science[M]. New Jersey: Prentices Hall, 1997. 41- 43.
- [7] 徐洁磐. 离散数学导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991. 213- 214.
- [8] 耿素云, 屈婉玲, 张立昂. 离散数学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [9] 方世昌. 离散数学[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1996. 8- 134.
- [10] 任现森, 吴裕树. 计算机数学基础(上册)——离散数学(第二版)[M]. 北京: 中央广播电视大学出版社, 2000.
- [11] Bernard Kolman, Robert C. Busby, Sharon Rose. Discrete Mathematical Structures[M]. New Jersey: Prentices Hall, 1996. 225- 229.
- [12] 李盘林, 李丽双, 李洋等. 离散数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999. 113- 115.
- [13] 居余马, 胡金德, 林翠琴, 等. 线性代数[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995. 127.
- [14] 徐森林. 流形和 Stokes 定理[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.

[责任编辑 王三福]

The Definition of Basic Mathematical Concepts Requires Standardization

ZHANG Hui-ling

(School of Mathematics and Information, Gansu United University, Lanzhou Gansu 730000, China)

Abstract: In university and college mathematical teaching materials published in past decades, it frequently occurs that one concept has two or more names and notations. This paper points out this phenomenon and its harmfulness with a lot of examples, and appeals that the definitions of basic mathematical concepts must be standardized.

Key words: basic mathematical concept; definition; notation; naming; one concept with too more different names and notations; standardization

(上接第 9 页)

Several Issues Should be Paid Attention to In the Teaching of the Curve Theory on Differential Geometry

Qi Bang-jiao

(School of Mathematics, Physics and Information Science, Tianshui Normal University, Tianshui Gansu 741001, China)

Abstract: In the teaching of the curve theory on differential geometry, several issues should be stressed and added that the curve $r=r(t)$, $a < t < b$ should be regarded as function but not the picture of quadrant; the relations between the curve in differential geometry and the curve in analytic geometry; the expression of the natural parameter of curve; independent constant variants s, k, T .

Key words: curve; vector quadrant; picture; natural parameter; constant variant