曲面可展的条件

孙国汉（安徽师范大学）　赵培标（安徽财贸学院）　刘以钧（阜阳师范学院）

摘要　本文给出两个关于曲面可展的结论。

关键词：可展曲面、测地挠率、测地线

1　引言

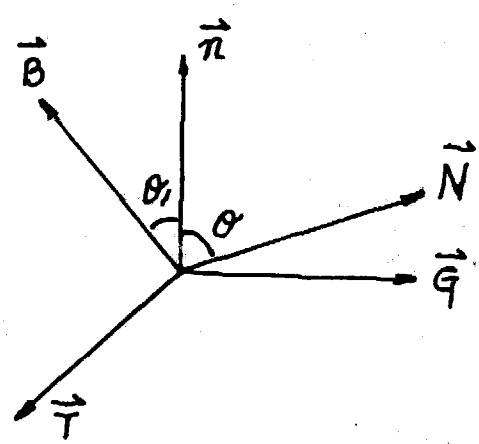
微分几何中的一些主要内容，特别是可展曲面部分，在机械设计和加工、船体的设计与放样等方面有着较广泛的实际应用，因此深入研究和应用可展曲面形成的条件、性质，无疑会有助于指导我们的生产实际活动。本文结合教学体会给出关于曲面可展的两个结论。

2　结论和证明

结论一：设 Γ 为曲面 Σ 上任意一曲线，沿 Γ 的一簇连续法线形成的直纹面可展的充分必要条件或是沿其方向的测地挠率为零；或者有关系式 $\tau_g=2\dot{\theta}$成立，其中 τ_g 表示测地挠率，θ 为主法线与曲面法线之夹角。

结论二：设 Γ：$\vec{Y}=\vec{Y}(s)$为曲面 Σ 上任意曲线，$\vec{\sigma}(s)$是 Σ 上沿 Γ 的平移向量，则直纹面 $\vec{X}=\vec{Y}(s)+t\vec{\sigma}(s)$可展时，必不是锥面可展。

结论一的证明：为便于说明，作图示如下，这里 $\vec{T}$、$\vec{N}$、$\vec{B}$分别表示切向量，主法向量和副法向量，θ、θ_1 为图所示 $\vec{n}$、$\vec{G}$分别为曲面法向量及 $\vec{G}=\vec{n}\times\vec{T}$



设 $\vec{B}=\vec{n}\cos\theta_1-\vec{G}\sin\theta_1$

则 $\dot{\vec{B}}=\dot{\vec{n}}\cos\theta_1-\dot{\vec{G}}\sin\theta_1-\vec{N}\dot{\theta}_1$

利用公式：$\dot{\vec{n}}=-K_n\vec{T}-\tau_g\vec{G}$

$$\dot{\vec{G}}=-K_g\vec{T}+\tau_g\vec{n}$$

以及　$\dot{\theta}_1=-\dot{\theta}$

我们有　$\tau^2=(\dot{\vec{B}})^2=(\dot{\vec{n}}\cos\theta_1-\dot{\vec{G}}\sin\theta_1-\vec{N}\dot{\theta}_1)^2$

$=[(K_g\sin\theta_1-K_n\cos\theta_1)\vec{T}-\tau_g(\cos\theta_1\vec{G}+\vec{n}\sin\theta_1-\vec{N}\dot{\theta}_1]^2$

$$=(k_g sin\theta_1-Kncos\theta_1)^2+\tau_g^2+\dot{\theta}_1^2+2\dot{\theta}_1\tau_g$$

而 $\tau_g=\tau+\dot{\theta}=\tau-\dot{\theta}_1$

由曲面可展条件：$\dot{\theta}+\tau=0$　我们有下式：

$$\dot{\theta}^2=(\tau_g-\dot{\theta})^2 \text{ 成立}$$

即　$\tau_g(\tau_g-2\dot{\theta})=0$ 成立

也即　$\tau_g=0$ 或 $\tau_g=2\dot{\theta}$

其中 K_g、Kn 分别表示测地曲率和法曲率，τ 表示曲线 Γ 的挠率。

作为结论一的直接推论，我们有如下的注。

注：设 Γ 为曲面 Σ 上任意一曲线，沿 Γ 的一簇连续法线形成的直纹面可展的充分必要条件或者沿 Γ 曲面法向量固定，或者测地挠率是曲线挠率的二倍。

结论二的证明：取曲面 Σ 上的曲率线网为参数网，定义单位向量：

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{X}_u}{\sqrt{\vec{X}_u^2}} \qquad \vec{e}_2=\frac{\vec{X}_v}{\sqrt{\vec{X}_v^2}} \qquad \vec{e}_3=\vec{e}_1\times\vec{e}_2$$

且 $\vec{e}_3=\vec{n}$

设 $\vec{\sigma}_0$ 为与 $\vec{\sigma}(s)$ 有相同正向的单位向量 ω 是由 e_1 到 $\delta(s)$ 的有向角。

则　$\vec{\sigma}_0=\vec{e}_1cos\omega+\vec{e}_2sin\omega$

$$\sigma(s)=|\vec{\sigma}|\vec{\sigma}_0$$

$$d\vec{\sigma}=\sigma_0d|\vec{\sigma}|+|\vec{\sigma}|d\vec{\sigma}_0$$

由曲面之结构方程，我们得到

$$d\vec{\sigma}_0=(sin\omega\cdot\omega_{21}-sin\omega d\omega)e_1+$$
$$(cos\omega\cdot\omega_{12}+cos\omega d\omega)\vec{e}_2+$$
$$(cos\omega\cdot\omega_{13}+sin\omega\omega_{23})\vec{e}_3$$

考察 $(\vec{T}、\vec{\sigma}_0、d\vec{\sigma}_0)$ 我们有下式：

$$(\vec{T}、\vec{\sigma}_0、d\vec{\sigma}_0)=sin(\omega-\varphi)d\vec{e}_3\cdot\vec{\sigma}_0$$

其中 φ 表示由 e_1 到 T 之间有向角

令　$sin(\omega-\varphi)de_3\cdot\sigma_0=0$

则当　$sin(\omega-\varphi)=0$ 时，直纹面可展便是切线曲面。

当　$d\vec{e}_3\cdot\vec{\sigma}_0=0$ 时，则不难推得 $d\vec{\delta}_0=0$

即　σ_0 为常向量，从而直纹面可展时必为柱面，综合可知结论得成立。

参考文献

〔1〕 吴大任编.《微分几何讲义》，高等教育出版社。

[2] 孙国汉等编.《微分几何》,浙江教育出版社。

The Developed Condition of Curved Surface

Sun Guohan Zhao Peibiao Liu Yijun

Abstract *In this paper we obtained two results concerning developed surface*

Key words: developed surface
deodesic curre
deodesic torsion

(上接第 17 页)

参考文献

[1] 吕林根 许子道。解析几何(第三版),高等教育出版社,1987
[2] 朱鼎勋 陈绍菱。空间解析几何(增订版),北京师范大学出版社,1984

Parametic Geometrical Meaning in the Axis Plane Beam Equation

Zhang Jiashen Dei Xiufa

Abstract *It gives parametic geometrical meaning in the axis plane beam equation by two intersect lines on the plane, and also obtained parametic geometrical meaning in the rec tilinear beam equation of plane analysis geometry.*