曲面的平行曲面

吴报强
(徐州师范大学 数学系 ,江苏 徐州　221009)

摘要: 给出平行曲面上对应曲线同时为测地线(渐近曲线) 的一个充要条件.

关键词: 平行曲面; 测地线; 渐近曲线
中图分类号: O168. 11　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1007-6573(1999) 04-0001-04

设曲面 $\Sigma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ 的平行曲面为 $\Sigma^*: \mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{n}$ (λ 为常数, $\mathbf{n}$ 为 Σ 的单位法矢). 在经典微分几何中,如下的命题是熟知的[1~4]:

命题　设 K, H 分别表示 Σ 上点的 Gauss 曲率和平均曲率,则可选取 Σ^* 的单位法向量 $\mathbf{n}^*$,使 Σ^* 的 Gauss 曲率与平均曲率分别为

$$K^* = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}, \qquad H^* = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}, \qquad (1 - 2\lambda H + \lambda^2 K \neq 0).$$

为了下面的叙述,我们首先给出它的证明.

证　由条件,有

$$\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{n}_1, \qquad \mathbf{r}_2^* = \mathbf{r}_2 + \lambda\mathbf{n}_2.$$

由 Weingarten 公式

$$\mathbf{n}_1 = -(\omega_1^1 \mathbf{r}_1 + \omega_1^2 \mathbf{r}_2), \qquad \mathbf{n}_2 = -(\omega_2^1 \mathbf{r}_1 + \omega_2^2 \mathbf{r}_2),$$

因而

$$\mathbf{r}_1^* \times \mathbf{r}_2^* = (1 - \lambda(\omega_1^1 + \omega_2^2) + \lambda^2(\omega_1^1\omega_2^2 - \omega_1^2\omega_2^1))\,\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (1 - 2\lambda H + \lambda^2 K)\,\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2,$$

这里 $2H = \omega_1^1 + \omega_2^2$, $K = \omega_1^1\omega_2^2 - \omega_1^2\omega_2^1$. 由 $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq 0$, $1 - 2\lambda H + \lambda^2 K \neq 0$, 故 Σ 上点的对应点也是 Σ^* 的正常点. 不失一般性,假定 $1 - 2\lambda H + \lambda^2 K > 0$, 故取 $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}$. 对 Σ 上的主方向,由 Rodriques 定理

$$d\mathbf{n} = -k_i d\mathbf{r}, \qquad (i = 1, 2)$$

而由 $2H = k_1 + k_2$, $K = k_1 k_2$ 和 $1 - 2\lambda H + \lambda^2 K = (1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2) > 0$, 我们知道 Σ^* 上对应点处的对应主方向平行. 实际上

$$d\mathbf{r}^* = d\mathbf{r} + \lambda d\mathbf{n} = (1 - \lambda k_i)\,d\mathbf{r},$$

$$d\mathbf{n}^* = d\mathbf{n} = -k_i d\mathbf{r} = \frac{-k_i}{1 - \lambda k_i} d\mathbf{r}^*,$$

故再由 Rordriques 定理,

$$k_i^* = \frac{k_i}{1 - \lambda k_i}.$$

由 $2H^* = k_1^* + k_2^*$ 和 $K^* = k_1^* \cdot k_2^*$ 即得结论.

注 1　[1]中要求 Σ 上的点是非抛物点是不必要的.

注 2　在对应点处, $K^* = 0$ 的充要条件是 $K = 0$; $H^* = 0$ 的充要条件是 $H = \lambda K$. 故可展曲面的平行曲面必为可展曲面,极小曲面的平行曲面为一 Weingarten 曲面.

注 3　Σ^* 上的点为脐点当且仅当对应点为 Σ 上的脐点.

注 4　$(K^* - H^{*2})K^{*-2}$ 不依赖 λ.

收稿日期:1999-05-13
作者简介:吴报强(1942 -) ,男,江苏南京人,教授,博士,主要从事微分几何的研究.

注 5 Σ、Σ^* 上曲率线互相对应.

由注 5,我们自然要问,Σ 上的测地线(渐近曲线)的对应曲线也是 Σ^* 上的测地线(渐近曲线)吗?若不然,要附加什么条件?本文主要讨论上述问题.首先给出:

定理 1 设 c 为 Σ 的测地线,则对应曲线 c^* 为 Σ^* 的测地线当且仅当如下情况之一发生:

i) c 为直线,且沿 c, $\mathrm{n}=\cos(as+b)\mathrm{e}_1+\sin(as+b)\mathrm{e}_2$. 这里 a,b 为常数,s 为 c 的正规弧长参数(下同),常矢 e_1、e_2 和 c 的单位切矢 $\mathrm{e}_3=\alpha_0$ 构成右手系;

ii) c 为平面曲线;

iii) c 为空间 Bertrand 曲线.

证 以 α、β、γ 分别表示 Σ 上曲线 c 的切矢、主法矢和副法矢,α^*、β^*、γ^* 类似.

i) 若 c,c^* 均为直线,则 $k=0$, $r^{*\prime}=\alpha_0+\lambda\mathrm{n}'$, $r^{*\prime\prime}=\lambda\mathrm{n}''$,且 $r^{*\prime}\times r^{*\prime\prime}=\lambda(\alpha_0+\lambda\mathrm{n}')\times\mathrm{n}''=0$. 但由 $\alpha_0\cdot\mathrm{n}=0$,故可取沿 c 的常正交标架场$\{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3=\alpha_0\}$,令

$$\mathrm{n}=\cos\theta(s)\mathrm{e}_1+\sin\theta(s)\mathrm{e}_2, \tag{0}$$

由 $\alpha_0\cdot\mathrm{e}_1=\alpha_0\cdot\mathrm{e}_2=\mathrm{e}_1\cdot\mathrm{e}_2=0$ 及

$$\mathrm{n}'=-\sin\theta\cdot\theta'\mathrm{e}_1+\cos\theta\cdot\theta'\mathrm{e}_2,$$

$$\mathrm{n}''=(-\cos\theta\cdot\theta'^2-\sin\theta\cdot\theta'')\mathrm{e}_1+(-\sin\theta\cdot\theta'^2+\cos\theta\cdot\theta'')\mathrm{e}_2,$$

我们得到$(\alpha_0+\lambda\mathrm{n}')\times\mathrm{n}''=0$,等价于

$$\begin{cases}-\sin\theta\cdot\theta'^2+\cos\theta\cdot\theta''=0,\\ -\cos\theta\cdot\theta'^2-\sin\theta\cdot\theta''=0,\\ \theta'^3=0.\end{cases}$$

解得 $\theta=$ 常数.反之,验证是平凡的.

若 c 为直线、c^* 为非直线的测地线.则沿 c,有 $\gamma^*\cdot\mathrm{n}^*=0$, $\gamma^*\parallel r^{*\prime}\times r^{*\prime\prime}$,故有$(\alpha_0+\lambda\mathrm{n}',\mathrm{n}'',\mathrm{n})=0$,但$(\mathrm{n},\mathrm{n}',\mathrm{n}'')=0$.因此$(\alpha_0,\mathrm{n},\mathrm{n}'')=0$,即有 $\mathrm{n}\times\mathrm{n}''=0$,这等价于

$$\cos\theta(-\sin\theta\cdot\theta'^2+\cos\theta\cdot\theta'')+\sin\theta(\cos\theta\cdot\theta'^2+\sin\theta\cdot\theta'')=0,$$

解得 $\theta''=0$, $\theta=as+b$.反之证略.

ii),iii) 若 c 为 Σ 上非直线的测地线.写出 c^* 的方程,并由 Frenet 公式:

$$r^*=r(s)+\lambda\mathrm{n}(s), \tag{1}$$

$$r^{*\prime}=\alpha(s)+\lambda\mathrm{n}'(s), \tag{2}$$

$$r^{*\prime\prime}=k(s)\beta(s)+\lambda\mathrm{n}''(s). \tag{3}$$

设

$$\mathrm{n}(s)=\cos\theta(s)\cdot\beta(s)+\sin\theta(s)\cdot\gamma(s), \tag{4}$$

则

$$\mathrm{n}'=-k\cos\theta\alpha-\sin\theta(\theta'+\tau)\beta+\cos\theta\cdot(\theta'+\tau)\gamma. \tag{5}$$

因 $k\neq0$,故沿 c 有 $\gamma\cdot\mathrm{n}=0$.可设 $\mathrm{n}=\beta$,因此在(4)中可设 $\theta=0$.这样(2)、(3)变成:

$$r^{*\prime}=(1-\lambda k)\alpha+\lambda\tau\gamma, \tag{6}$$

$$r^{*\prime\prime}=(-\lambda k')\alpha+(k(1-\lambda k)-\lambda\tau^2)\beta+\lambda\tau'\gamma. \tag{7}$$

因而

$$r^{*\prime}\times r^{*\prime\prime}=-\lambda\tau(k(1-\lambda k)-\lambda\tau^2)\alpha-\lambda((1-\lambda k)\tau'+\lambda\tau k')\beta+(1-\lambda k)(k(1-\lambda k)-\lambda\tau^2)\gamma, \tag{8}$$

那么 c^* 为 Σ^* 的测地线当且仅当为

$$(r^{*\prime}\times r^{*\prime\prime})\cdot\mathrm{n}^*=0,$$

由(8)、(4)可知有

$$\lambda((1-\lambda k)\tau'+\lambda\tau k')=0. \tag{9}$$

若 $\tau=0$,(9)式成立,则 c^* 为 Σ^* 的测地线.可是 c^* 并不是直线.事实上,若 c^* 为直线,则应有 $r^{*\prime}\times r^{*\prime\prime}=0$,因而 $1-\lambda k=0$.可是沿 c, $\mathrm{n}=\beta$,得 $\mathrm{dn}=\mathrm{d}\beta=-k\mathrm{d}s\alpha+\tau\mathrm{d}s\gamma=-k\mathrm{d}\gamma$.由 Rordriques 定理,$c$ 为

Σ 之曲率线. $k_n = k\beta\cdot n = k$, 因而 k 也为主曲率. $0 = 1 - \lambda k = 1 - \lambda k_i$ 与假设矛盾. 此时 c^* 也只能是 Σ^* 的非直线的测地线.

若 $\tau \neq 0$, 由(9)有

$$((1 - \lambda k)\tau^{-1})' = 0,$$

解得

$$1 - \lambda k + C\tau = 0 \qquad (C \text{ 为常数}). \tag{10}$$

此时 $\lambda \neq 0$, 即 c 为一 Bertrand 曲线. 证毕.

例 1　直纹面的直母线的对应曲线仍是平行曲面的直母线的充要条件是该曲面为可展曲面.

例 2　旋转曲面的经线($\tau = 0$)是旋转曲面的测地线, 它的对应曲线也是 Σ^*(也是旋转曲面)的经线. 特别, 球面的大圆的对应曲线也是平行曲面上的大圆.

例 3　圆柱面 Σ 上有三类测地线: 直母线、直母线的正交轨线、圆柱螺线, 它们的对应曲线也是 Σ^* 上的测地线.

例 4　$\{e_1, e_2, e_3\}$ 为 E^3 的直角坐标标架. 曲面 Σ: $r(u, v) = ue_1 + v(\cos ue_2 + \sin ue_3) + v^3(-\sin ue_2 + \cos ue_3)$ 沿直线 $c: v = 0$, $n = \cos ue_3 - \sin ue_2$. 故对应曲面是 Σ^* 上的非直线测地线.

例 5　因任一空间曲线都是它的从法线曲面上的测地线, 故空间 Bertrand 曲线必是它的从法线曲面的测地线.

由例 1～3, 我们有如下问题:

问题　曲面 Σ 的所有测地线都是 Σ^* 的测地线, Σ 是否只可能是平面、圆柱面、球面之一?

下面转入对渐近曲线的讨论.

定理 2　设 c 为 Σ 的渐近曲线, 则对应曲线 c^* 为 Σ^* 的渐近曲线当且仅当如下之一情况发生:

i) c 为直线, 且沿 c, n 为常矢;

ii) c 为平面曲线.

证　i) 若 c 为直线, 由 $r^{*\prime} = \alpha_0 + \lambda n'$, $r^{*\prime\prime} = \lambda n''$, 则 $\beta^* \times ((r^{*\prime} \times r^{*\prime\prime}) \times r^{*\prime}) = 0$, 即

$$\beta^* \times (\lambda(\alpha_0 + \lambda n')^2 n'' - \lambda\langle\alpha_0 + \lambda n', n''\rangle(\alpha_0 + \lambda n')) = \mathbf{0}.$$

欲 c^* 为直线, 则由定理 1(i), n 为常矢; 欲 $\beta^* \cdot n^* = \beta^* \cdot n = 0$ 由 $\alpha_0 \cdot n = n \cdot n' = 0$ 可得

$$(\alpha_0 + \lambda n)^2\langle n, n''\rangle = 0.$$

但从 $n \cdot n' = 0$ 可知 $n \cdot n'' + n'^2 = 0$, 故 $n'^2 = 0$. 这意味着 n = 常矢. 反之证略.

ii) 设 $k \neq 0$, 由 $\beta \cdot n = 0$, 不妨设 $n = \gamma$, 在(4)中, 取 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. 此时

$$r^{*\prime} = \alpha - \lambda\tau\beta,$$
$$r^{*\prime\prime} = \lambda k\tau\alpha + (k - \lambda\tau')\beta - \lambda\tau^2\gamma,$$
$$r^{*\prime} \times r^{*\prime\prime} = ((k - \lambda\tau') + \lambda^2 k\tau^2)\gamma + \lambda\tau^2\beta + \lambda^2\tau^3\alpha.$$

欲 c^* 为直线, 则 $r^{*\prime} \times r^{*\prime\prime} = 0$, 这导致 $\lambda^2\tau^3 = 0$, $\lambda\tau^2 = 0$, $k - \lambda\tau' + \lambda^2 k\tau^2 = 0$, 解得 $\tau = 0$, $k = 0$ (矛盾), 这意味着 c 是非直线的渐近曲线, 它的对应曲线不可能是直线.

欲 c^* 为非直线的渐近曲线, 则

$$\begin{aligned}
0 &= \beta^* \times ((r^{*\prime} \times r^{*\prime\prime}) \times r^{*\prime}) \\
&= \beta^* \times ((r^{*\prime} \cdot r^{*\prime})r^{*\prime\prime} - (r^{*\prime} \cdot r^{*\prime\prime}) \cdot r^{*\prime}) \\
&= \beta^* \times ((1 + \lambda^2\tau^2)(\lambda k\tau\alpha + (k - \lambda\tau')\beta - \lambda\tau^2\gamma) - \lambda^2\tau \cdot \tau'(\alpha - \lambda\tau\beta)).
\end{aligned}$$

但由 $0 = \beta^* \cdot n^* = \beta^* \cdot n = \beta^* \cdot \gamma$, 即得

$$\lambda\tau^2(1 + \lambda^2\tau^2) = 0,$$

故 $\tau = 0$. 反之证略. 证毕.

推论　c 为 Σ 的渐近曲线, 则 c^* 为 Σ^* 的渐近曲线当且仅当沿 c, Gauss 曲率 K 为零.

证　必要性　若 $k = 0$, 则由 Euler 公式, 沿 c, $k_n = 0$. 但 n 为常矢, $\mathbf{0} = dn = -k_n d\gamma$, 故由 Rodriques 定理, c 为曲率线, 即主曲率之一为零, 故 $K = 0$; 又若 $k \neq 0$, $n = \gamma$, $dn = -\tau\beta ds = 0$, 故主曲率之一为零, 也得 $K = 0$.

充分性 若 $k=0$,但 $K=0$,故 c 为曲率线,$\mathrm{d}\mathbf{n}=-0\cdot\mathrm{d}\gamma=0$, $\mathbf{n}=$常矢;若 $k\neq 0$,则 $\mathbf{n}=\gamma$, $k_n=0$,这意味 c 为曲率线,$\mathrm{d}\mathbf{n}=-k_i\alpha\mathrm{d}s$,而 $\mathrm{d}\mathbf{n}=-\tau\mathrm{d}s\beta$,经比较得 $\tau=0$. 证毕.

例 6 任一空间曲线是它的主法线曲面上的渐近曲线. 特别平面曲线必是所在平面上的渐近曲线,它的对应曲线也是 Σ^*(亦为平面)上的渐近曲线.

例 7 曲面 $\Sigma: z=a\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$, $(a>0, x>0, y>0)$ 上有两族渐近曲线 $y=kx$, $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=C$. 通过直接计算 $K=0 \Leftrightarrow x=\pm y$,即直线 $y=\pm x$ 为 Σ 的渐近曲线,且对应曲线也是 Σ^* 上的渐近曲线.

参考文献:

[1] 苏步青,胡和生,沈纯理,等. 微分几何[M]. 北京:高等教育出版社,1979. 115.

[2] 虞言林,郝凤歧. 微分几何讲义[M]. 北京:高等教育出版社,1989. 103.

[3] 陈维桓. 微分几何初步[M]. 北京:北京大学出版社,1990. 109~110.

[4] SPIVAK M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry,Vol. Ⅲ[M]. Berkeley:Publish of Perish Inc,1979. 270~271.

Parallel Surfaces of a Surface

WU Bao-qiang

(Department of Mathematics,Xuzhou Normal University,Xuzhou 221009,China)

Abstract: In this paper,we discuss parallel surfaces of a surface and obtain the sufficient and necessary condition for geodesic (asymptotic curve) of the surface whose corresponding curve is geodesic (asymptotic one) of the parallel surface.

Key words: parallel surface; geodesic; asymptotic curve