

“曲率”教学管见^①

刘元兴

(湖南科技大学 数学与计算科学学院,湖南 湘潭 411201)

摘 要:讨论了三维空间微分几何中的重要概念——曲率在课堂教学中的—些值得注意问题,并讨论了曲面上几种曲率之间的关系。

关键词:曲率;曲面;曲线

中图分类号:O186.1

文献标识码:A

文章编号:1671-0231(2004)02-0115-02

在三维空间经典微分几何中,曲率是一个非常重要的概念,它贯穿于整个微分几何的教学之中。因此,掌握好曲率,对于整个微分几何的学习至关重要。下面是曲率教学中的几点注意。

1 空间曲线的曲率

1.1 定义:设空间 C^3 类曲线 (C) 的方程为 $\vec{r} = \vec{r}(s)$, 曲线 (C) 上的点 P , 其自然参数为 s , 另一个邻近点 P_1 , 自然参数为 $s + \Delta s$, 在 P, P_1 两点分别作曲线 (C) 的单位切向量 $\vec{a}(s), \vec{a}(s + \Delta s)$, 它们的夹角为 $\Delta\phi$, 则定义 (C) 在 P 点的曲率为

$$k(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \right|$$

其中 Δs 为 P 点及其邻近点 P_1 间的弧长。

1.2 几点注意

(1) 曲率的几何意义是曲线的切向量对于弧长的旋转速度,它刻画了曲线的弯曲程度。曲率越大,曲线的弯曲程度就越大。曲率越小,曲线的弯曲程度就越小。特别地,当曲率为零时,曲线为直线。

(2) 定义中的曲率是非负的。其实也可以定义有向曲率,如平面上的曲线的曲率就是有向的。但对于空间曲线来说,定义有向曲率会使后面定义挠率变得较为复杂,由于曲率只刻画了曲线的弯曲程度,所以在定义曲率时不考虑方向,讨论会更加方便,但又能满足需要。

(3) 由于曲率为零的曲线为直线,所以在讨论一般的曲线时,往往要求曲率不为零。特别是定义了空间曲线的挠率之后,有一个重要的结论是:挠率恒等于零的曲线为平面曲线。在这个讨论中,实际上要求该曲线的曲率处处不为零,但一般的书上都没有注明。因为如果不是这样,结论就可能出问题,我们可以找出个例子,例中的挠率能定义为恒等于零,便它不是平面曲线^[1]。

(4) 在经典微分几何曲线论这一部分,讨论的主要是曲线的局部性质,即仅取决于曲线上一点邻近的行为的哪些性质。而在讨论中,曲率(当然还有挠率)起了决定作用,这一点可以从曲线在一点处邻近曲线的近似方程直接得出,也可以从曲线论基本定理说明这一点,由此可见曲率在曲线论中的地位和作用。

① 收稿日期:2003-11-14

作者简介:刘元兴(1957-),男,湖南科大数学与计算科学学院讲师,研究方向:微分几何。

(5) 曲率在刚体运动下不变。

2 曲面上的曲率

对于空间曲面,仍用曲率来研究,用 k 表示曲面曲线上一点处的曲率,而其它曲率,如法曲率 k_n ,主曲率 k_1, k_2 ,高斯曲率 K ,平均曲率 H ,测地曲率 k_g 等,几乎都与 k 有关^[2],它们的关系可用下式表出:

曲率 k ⇒	1、 $k_n = k \cos \theta = \vec{\beta} \cdot \vec{n} \Rightarrow$ ↓ (1) k_n 为曲率向量 $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ 在曲面上点 P 处的法向量 $\vec{n}$ 上的投影。 (2) $k_n = 0$ 的方向为渐近方向。 (3) 从 $k_n = \text{II} \cdot \text{I} = 0$ 可得 $Ldu^2 + 2Mdudv + Nd v^2 = 0$ 为曲面上渐近曲线的微分方程。	主曲率 $k_1, k_2 \Rightarrow$ ↓ (1) 主方向上的法曲率。 (2) 曲率线上的法曲率。 (3) 欧拉公式 $k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$ (4) 主曲率是曲面上点 P 处所有方向上的法曲率中的最大值和最小值。	$K = k_1 k_2$ ↓ (1) K 为内蕴量。 (2) 曲面为可展曲面的充要条件是 $K = 0$ 。 (3) 按 $K > 0, K = 0, K < 0$ 分曲面上的点为椭圆点,抛物点,双曲点。	$H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$ ↓ (1) $H = 0$ 的曲面为极小曲面。 (2) $\text{III} - 2H \text{II} + KI = 0$
	2、 $k_g = \vec{\beta} \cdot \vec{\varepsilon} = \pm k \sin \theta$ ↓ (1) k_g 是曲率向量 $\vec{\beta}$ 在曲面上点 P 处的切平面上的投影。 (2) $k^2 = k_g^2 + k_n^2$ (3) 沿曲面上的测地线处处有 $k_g = 0$ 。			

3 结论

经典微分几何是大学本科数学专业的一门主要课程,它主要是研究曲线和曲面的局部性质。所谓局部性质,指的是哪些仅取决于曲线或曲面上一点邻近的行为的性质,而其中最有趣和最具有代表性的是曲面的研究。然而,在研究曲面的时候,自然会出现曲线的某些局部性质,因此,曲率显得特别重要也是自然的事,从上面第二部分的关系看出,曲面论中的主要内容都与曲率有关,所以把曲率学好了,实际上局部微分几何也基本上通了,而且对整体微分几何的学习也会起到很好的作用。因此,无论是教师还是学生,都必须把对曲率的学习,理解,运用放在学习微分几何的一个重要位置,这样,这门功课才有望学好。

参考文献:

- [1] 多卡模著,田畴等译. 曲线和曲面的微分几何学[M]. 上海:上海科学技术出版社.
- [2] 梅向明,黄敬之. 微分几何(二版)[M]. 北京:高等教育出版社.

“Curvature” Teaching personal opinion

LIU Yuan - xing

(School of Mathethematics and Computing Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract : This essay discussed some noticeable problems in teaching curvature that is a key concept in three dimensional space differetial geometry, and the relation between several curvatures on surface.

Key words : curvature ; surface ; curve