附录 A

欧氏空间的合同变换

三维欧氏向量空间$\mathbb{R}^3$在固定一个右手直角坐标系后, 其中两点$P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$之间的距离定义为

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

空间中点之间一对一的对应称为**变换**. 变换$\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$如果保持空间中任意两点的距离, 即对于任意两点$P$和$Q$, $d(P, Q) = d(\mathcal{T}(P), \mathcal{T}(Q))$, 则称$\mathcal{T}$为$\mathbb{R}^3$中的**合同变换**, 或**欧氏变换**, 或**运动**.

设$O(3) = \{A$是3×3实矩阵 $\mid A^t A = I_3\}$是三阶正交矩阵全体, 对$A \in O(3)$及$P_0 \in \mathbb{R}^3$, 下述变换

$$\mathcal{T}(P) = PA + P_0, \quad \forall\ P \in \mathbb{R}^3$$

是平移P_0与正交变换A的复合, 容易证明这类变换是合同变换.

反之, 设$\mathcal{T}$是$\mathbb{R}^3$的合同变换, 则存在$A \in O(3)$以及$P \in \mathbb{R}^3$使得

$$\mathcal{T}(X) = XA + P, \quad \forall\ X \in \mathbb{R}^3.$$

从几何的角度来看, 欧氏变换是将欧氏空间的点做下述三种变换: 平移、旋转、镜面反射.

可以验证, 合同变换

$$X \to XA + P, \quad T \in O(3), \quad P \in \mathbb{R}^3$$

的全体构成一个群, 称为**三维合同变换群**或**三维欧氏变换群**. 当$\det A = 1$时, 对应的合同变换称为的一个**刚体运动**; 当$\det A = -1$时, 对应的变换称为**反向刚体运动**. 直观地讲, 刚体运动排除了反射变换的情形, 或者说刚体运动是平移与旋转的复合.