关于可展曲面等价条件的两点注记

王　伟
(淮北煤炭师范学院国有资产管理处, 淮北 235000)

摘　要: 设 Σ: $r=\rho(u)+v\tau(u)$是直纹面, 首先论证将$(\rho', \tau, \tau')=0$作为可展曲面定义的合理性, 然后给出可展曲面的一个新的等价条件.

关键词: 可展曲面; 直母线; 曲率线
分类号: O186.11　　**文献标识码**: C　　**文章编号**: 1000-2227(2000)03-0061-02

可展曲面的理论是经典微分几何必涉及的内容, 而可展曲面的若干等价条件, 则是这部分内容的重点. 在这诸多等价条件中, Σ: $r=\rho(u)+v\tau(u)$为可展曲面$\Leftrightarrow(\rho', \tau, \tau')=0$是其他等价条件之基础, 某些教科书甚至将$(\rho', \tau, \tau')=0$作为$\Sigma$是可展曲面的定义. 显然, 若直纹面$\Sigma$的直母线不止一族, 那么以上述条件作为可展曲面的定义, 便存在该条件与直母线族的选取是否有关的问题. 本文将首先给出将$(\rho', \tau, \tau')=0$作为可展曲面的定义的合理性的证明; 然后利用曲率线的几何特征, 我们将得到可展曲面的一个新的等价刻划.

1　一道习题引出的思考

[1]中有一道习题: 证明双曲抛物面是非可展曲面, 注意, 双曲抛物面有两族直母线, 所以必须验证两次(但验证第二次可利用第一次的结果). 该练习意在提示人们, 在检验有不止一族直母线的直纹面是否可展时, 必须分别选取每族直母线作为 v—线, 并验证$(\rho', \tau, \tau')=0$是否成立. 现在我们试问, 上述练习中的"注意"是否有必要?文[1-3]中以$(\rho', \tau, \tau')=0$作为可展曲面的定义合理性?为此, 我们给出如下结果:

定理 1　设直纹面 Σ: $r=\rho(u)+v\tau(u)$不是平面, 若$(\rho', \tau, \tau')=0$, 则过 Σ 上一点仅有Σ的一条直母线.

证明　因 Σ: $r=\rho(u)+v\tau(u)$不是平面, 故它的第二类基本量 L、M、N 不全为0. 但$(\rho', \tau, \tau')=0$及 $r_{vv}=0$ 意味着 $M=N=0$, 所以在 Σ 上 $L\neq0$. 任取 Σ 上一点 P_0, 并假设 Σ 上通过 P_0 有一条直线 L_0 不同于 v—线, 则 Σ 在 P_0 点便有二不同实渐近方向, 令沿 L_0 的渐近方向为 $du: dv$, 则 $du\neq0$, 但 $Ldu^2+2Mdudv+Ndv=0$, 故 $L=0$, 矛盾. 因此, 过 Σ 上一点有且仅有一条直母线.

由定理1, 若一直纹面Σ有两族直母线, 且选取一族作为 V—线时, 有$(\rho', \tau, \tau')\neq0$, 那么对另一族不必验证, 即可断定$\Sigma$是非可展的. 另外, 定理1也保证了[2,3]中关于可展曲面定义的合理性.

收稿日期: 2000—03—20
作者简介: 王　伟(1971-　), 男, 安徽淮北人, 学士, 助教

2 可展曲面一个新的等价刻划

曲面上曲率线的几何特征表明: 曲面上 Σ 曲线 C 为曲率线$\Leftrightarrow\Sigma$ 的沿 C 的所有法线形成一可展曲面. 那么, 是否每一可展曲面也能被看成一曲面沿它的某一曲率线的所有法线形成的呢?下述结果对此作了肯定的回答:

定理 2 曲面 Σ 为可展曲面$\Leftrightarrow\Sigma$ 是另一曲面$\overline{\Sigma}$沿其曲率线$\overline{C}$ 的所有法线形成之曲面.

证明 "$\Leftarrow$" 设 $\overline{C}$: $r=\overline{\rho}(u)$ 是曲面 $\overline{\Sigma}$ 的曲率线, $\overline{\Sigma}$ 沿 $\overline{C}$ 的法矢为 $\overline{n}(u)$, 则 Σ: $r=\overline{\rho}(u)+v\overline{n}(u)$. 由于$d\overline{\rho}/\!/d\overline{n}$, 所以$(\overline{\rho}',\overline{n},n')=0$, 即 Σ 可展.

"$\Rightarrow$"设 Σ 是可展曲面, 则Σ 是柱面、锥面或是某一曲线的切线曲面. 若:

(i) Σ 为柱面, 令$\overline{\Sigma}$是与 Σ 的母线垂直的平面, 且令$\overline{C}\equiv\overline{\Sigma}\cap\Sigma$, 则$\overline{C}$ 是$\overline{\Sigma}$ 上一曲率线, 且 Σ 是$\overline{\Sigma}$ 沿$\overline{C}$ 的所有法线形成的曲面;

(ii) Σ 是锥面, 令 $\overline{\Sigma}$ 是以 Σ 的任意点为球心的球面, 且令$\overline{C}\equiv\overline{\Sigma}\cap\Sigma$, 则$\overline{C}$ 是$\overline{\Sigma}$ 上一曲率线, 且 Σ 是$\overline{\Sigma}$ 沿$\overline{C}$ 的所有法线形成的曲面;

(iii) Σ 是曲线 C: $r=\rho(u)$的切线曲面, 令$\overline{C}$: $r=\overline{\rho}(u)$是 C 的一渐伸线, 且令$\overline{\Sigma}$: $r=\overline{\rho}(u)+v\gamma(u)$, 这里 $\gamma(u)$是曲线 C 的付法矢. 显然 C 的切矢 α 正是$\overline{\Sigma}$ 沿$\overline{C}$ 的法矢, 即 Σ 是$\overline{\Sigma}$ 沿$\overline{C}$ 的所有法线形成的曲面, 且由 $d\overline{\rho}\,\|\,\beta\,\|\,d\alpha$, 这里 β 是 C 的主法矢, 有 $d\overline{\rho}\,\|\,d\alpha$, $\therefore\overline{C}$是$\overline{\Sigma}$ 的一曲率线. 证毕.

参考文献:

[1] 吴大任. 微分几何讲义[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.

[2] 梅向明, 黄敬之. 微分几何(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.

[3] Manfredo P do Carmo。Differential geometry of curves and surfaces[M]. New Jersey: Prentice - Hall, Englewood Cliffs, 1976.

Two Notes for Equivalent Conditions of Developable Surface

WANG Wei

(Management Office of Sate-owned Assets at Huaibei Coal Industry Teacher's College, Huaibei 235000)

Abstract: Let Σ: $r=\rho(u)+v\tau(u)$ be a ruled surface, in the paper, we prove rationality taking $(\rho'(\mu),\tau(\mu),\tau'(\mu))=0$ as definition of developable surface, and get a new equivalent condition of developable surface.

Key words: developable surface; ruling of a ruled surface; line of curvature