昆明师范高等专科学校学报 2004, 26 (4): 95~99 CN 53-1131/G4 ISSN 1008-7958
Journal of Kunming Teachers College

关于《微分几何》的几个问题

黄世同[1], 王永节[2]
(1.昆明师范高等专科学校 数学系, 云南 昆明 650031; 2.昆明师范高等专科学校 数学系 2001 级, 云南 昆明 650031)

摘要:梅向明先生所编《微分几何》教材被越来越多的高校数学系所采用,但尚有美中不足之处.文中给出了有关渐缩线方程,相对曲率计算公式的更简便的推导;讨论了如何才能很快地做出切线,法面,密切平面,副法线和从切平面方程的方法;还对有的习题进行了推广.

关键词:微分几何;渐缩线;相对曲率;高斯曲率;平面族的包络
中图分类号:O186.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1008-7958(2004)04-0095-05

Some Problems about *Infinitesimal Geometry*

HUANG Shi-tong[1], WANG Yong-jie[2]
(1. Mathematics Department, Kunming Teachers College, Yunnan Kunming 650031, China;
2. Mathematics Department, Kunming Teachers College, Grade 2001 Yunnan Kunming 650031, China)

Abstract: The textbook *Infinitesimal Geometry* compiled by Mr. Mei Xiangming is used by more and more mathematics departments of universities and colleges. But there are still room for improvement. In this article the authors first put forward a few simpler and easier methods for calculation the evolute equation, the formula of relative curvature; then, discuss the methods for calculating the equations of the tangent line, the normal plane, the osculating plane, the binormal, and the rectifying plane; and finally popularize some exercises.

Key words: *Infinitesimal Geometry*; evolute; relative curvature; Gaussian curvature; envelope of plane clusters

梅向明先生所编《微分几何》(以下简称"教材")是以"数学分析"作为工具研究几何空间中的图形(如曲线、曲面)的性质和规律的数学学科[1].学习是循序渐进的,首先应该学好高斯关于三维欧氏空间中的曲线和曲面的局部理论,本文以学习梅向明先生所编《微分几何》一书的过程中的一些心得、体会,写出来,供大家参考.

1 关于平面曲线的渐缩线方程的又一种推导

下面给出比教材上的推导方法来得快的另一种推导方法:[2]

设已给平面曲线为(c):$\vec{r}=\vec{r}(t)=\{x(t),y(t)\}$,$\vec{r}\in c^2$,设其渐缩线为$(c^*)$,方程为$\vec{r}^*=\vec{r}^*(t)$,设$\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$分别为$\vec{r}$的单位切向量、单位主法向量,由渐缩线的定义可知$\vec{r}^*=\vec{r}+R\vec{\beta}$,(这里$R$是$c$上点$\vec{r}$处的曲率半径).

$$\because \quad \vec{\alpha}=\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\{x',y'\}$$

收稿日期:2004-06-16

作者简介:黄世同(1947-),男,江苏淮阴人,讲师,主要从事微分几何研究;王永节(1981-),女,云南禄劝人,在读学生,主要从事初中数学教学研究.

$$= \left\{\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right\},\vec{r} = \{x(t),y(t)\},$$

不妨设曲线向左转，

$$\therefore R = \frac{1}{k} = \frac{1}{|k_r|} = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''x'-y'x''}.$$（曲线向左转时，k_r 为正）

设 $\vec{\alpha} = \{\cos\varphi,\sin\varphi\}$，则有 $\vec{\beta} = \left\{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$,

$$\therefore \vec{\beta} = \left\{\frac{-y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right\},$$

$$\therefore \quad \vec{r}^* = \{x(t),y(t)\} + \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''x'-y'x''}\left\{\frac{-y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}},\frac{x'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \left\{x(t)-\frac{y'(x'^2+y'^2)}{y''x'-y'x''},\ y(t)+\frac{x'(x'^2+y'^2)}{y''x'-y'x''}\right\}.$$

设 $\vec{r}^* = \{x^*,y^*\}$ 有

$$\begin{cases} x^* = x(t)-\dfrac{y'(x'^2+y'^2)}{y''x'-y'x''}, \\ y^* = y(t)+\dfrac{x'(x'^2+y'^2)}{y''x'-y'x''}. \end{cases}$$（教材上的 1.43 式）

当曲线向右转时，也可得到此(1.43)式.

2 关于平面曲线的相对曲率 k_r 的计算公式的又一种推导

设已给平面曲线为 $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t),y(t)\}$，其曲率为 k，由空间曲线的曲率计算公式

$$k = \frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3},$$

将 xoy 平面视为空间中 $z=0$ 的平面，有 $\vec{r}' = \{x',y',0\}$，知 $|\vec{r}'| = \sqrt{x'^2+y'^2}$，$\vec{r}'' = \{x'',y'',0\}$，则 $\vec{r}'\times\vec{r}'' = \{0,0,x'y''-x''y'\}$.

$$\therefore |\vec{r}'\times\vec{r}''| = |x'y''-x''y'|,$$

$$\therefore k = \frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

由于曲线向左转时，k_r 的符号为正，而 $\vec{r}'\times\vec{r}''$ 的符号也为正，而 $\vec{r}'\times\vec{r}''$ 的符号，由 $x'y''-x''y'$ 决定，故 $x'y''-x''y'$ 为正；当曲线向右转时，k_r 的符号为负，此时 $\vec{r}'\times\vec{r}''$ 的符号也为负，故 $x'y''-x''y'$ 的符号也为负.

$$\therefore k_r = \pm k = \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3 平面曲线的挠率恒等于零的证明

在教材 P65 页上关于“平面曲线的挠率恒等于零”的证明[2]:

设已给平面曲线 $\vec{r} = \vec{r}(t)$，其所在平面为 π，π 的法向量为 $\vec{n}$（常向量），如图 1，在 π 上取定一定点 P_0，P_0 的对应矢径为 $\vec{r}_0$，设 P 为平面 π 上一动点（$P\in\vec{r}$，P 沿 $\vec{r}$ 动），P 对应的矢径为 $\vec{r}$，有

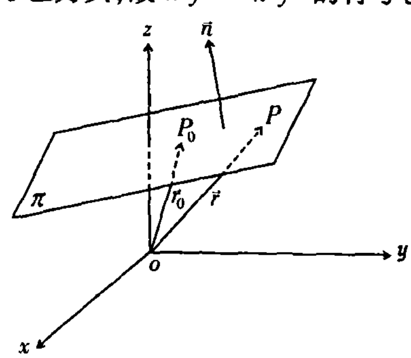

图 1 平面曲线的证明图

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n} = a \ (\text{常数 } a = \vec{r}_0\cdot\vec{n}). \tag{1}$$

(1) 式两边对 t 求导，得

$$\vec{r}' \cdot \vec{n} = 0, \tag{2}$$

(2) 式两边也对 t 求导,得

$$\vec{r}'' \cdot \vec{n} = 0, \tag{3}$$

(3) 式两边对 t 求导,得

$$\vec{r}''' \cdot \vec{n} = 0, \tag{4}$$

由(2),(3),(4) 式知 $\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}'''$ 均与 $\vec{n}$ 垂直,$\therefore \vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}'''$ 共面. $\therefore (\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''') \equiv 0$. 而

$$\tau = \frac{(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2}, \quad \therefore \tau \equiv 0.$$

这就证明了平面曲线的挠率恒等于零.[3](这里参考了文献[3]上 P26 的证明)

4　关于如何很快做出切线、法面、密切平面等的方程的方法

关于如何才能很快地做出空间曲线在一点的切线、法面、密切平面 ,副法线,主法线和从切平面方程的方法(从而确定空间曲线的基本三棱形):

设已给空间曲线的方程为 $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$,求其在 $t = t_0$ 点处的切线,法面,密切平面,副法线,主法线和从切平面的方程(这里 $\vec{r} \in c^3$). 我认为按如下的顺序来做,能较快得出结果. 具体做法如下:[4]

切线

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'},$$

法面

$$x_0'(x - x_0) + y_0'(y - y_0) + z_0'(z - z_0) = 0,$$

密切平面

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow l_0 x + m_0 y + n_0 z + D = 0 \quad ,$$

副法线

$$\frac{x - x_0}{l_0} = \frac{y - y_0}{m_0} = \frac{z - z_0}{n_0},$$

主法线

$$\begin{cases} x_0'(x - x_0) + y_0'(y - y_0) + z_0'(z - z_0) = 0 \\ l_0 x + m_0 y + n_0 z + D = 0 \end{cases},$$

从切平面

$$\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ m_0 & n_0 \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ n_0 & l_0 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ l_0 & m_0 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0.$$

5　对直纹面上沿直母线移动的法向量的变化情况的证明

教材上第二章的直纹面和可展曲面中的直纹面方程为 $\vec{r} = \vec{a}(u) + v\vec{b}(u)$, $\vec{a} = \vec{a}(u)$ 为导线, $\vec{b}(u)$ 是直母线上的一单位矢量.

在教材 P149 上"我们现在来讨论当 P 点在曲面上沿一条直母线移动时,法向量 $\vec{n}$ 的变化情况:

情形 1: $\vec{a}' \times \vec{b} \not\parallel \vec{b}' \times \vec{b}$,即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}') \neq 0$…… 情形 2: $\vec{a}' \times \vec{b} \parallel \vec{b}' \times \vec{b}$,即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}') = 0$."[1] 这就

是要我们证明：$\vec{a}'\times\vec{b}\parallel\vec{b}'\times\vec{b}\Leftrightarrow(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0.$

证明 由吕林根所编《解析几何》定理1.8.2知

$$\because\quad \vec{a}'\times\vec{b}\parallel\vec{b}'\times\vec{b}\Leftrightarrow(\vec{b}'\times\vec{b})\times((\vec{a}'\times\vec{b})=\vec{0}\quad,$$

再由吕林根编《解析几何》的双重矢积计算公式知

$$\Leftrightarrow(\vec{b}'\cdot(\vec{a}'\times\vec{b}))\vec{b}-(\vec{b}\cdot(\vec{a}'\times\vec{b}))\vec{b}'=\vec{0}\quad.$$

由定理1.9.3的推论知$\Leftrightarrow(\vec{b}',\vec{a}',\vec{b})\vec{b}-(\vec{b},\vec{a}',\vec{b})\vec{b}'=\vec{0}$.

由《解析几何》定理1.9.3知$\Leftrightarrow(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')\vec{b}=\vec{0}$,

$$\therefore\quad \vec{a}'\times\vec{b}\parallel\vec{b}'\times\vec{b}\Leftrightarrow(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0\quad.$$

下面我们计算直纹面上的高斯曲率 K：

$$\because\quad \vec{r}_u=\vec{a}'+v\vec{b}',\vec{r}_v=\vec{b}\quad,$$

$$\vec{r}_{uu}=\vec{a}''+v\vec{b}'',\vec{r}_{uv}=\vec{b}',\vec{r}_{vv}=\vec{0}\quad,$$

$\therefore$ 单位法向量为 $\vec{n}=\dfrac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}=\dfrac{\vec{a}'\times\vec{b}+v\vec{b}'\times\vec{b}}{\sqrt{EG-F^2}}$,

$\therefore N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}=0,\ \therefore L$ 不必计算.

这里我们总结出若 $\vec{r}_{uu}$,或 $\vec{r}_{vv}$ 中有一个为 $\vec{0}$,则 L,N 不必计算.或者 L,N 中有一个为0,则另一个不必计算,这是

$$\because K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}[5],\ \because M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=\frac{(\vec{b}',\vec{a}',\vec{b})}{\sqrt{EG-F^2}},\therefore K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')^2}{(EG-F^2)^2}\quad.$$

$\therefore$1) 当 $\vec{a}'\times\vec{b}\nparallel\vec{b}'\times\vec{b}$,即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')\neq0$,也就是 $\vec{r}$ 是不可展的直纹面时,$K<0$.

2) 当 $\vec{a}'\times\vec{b}\parallel\vec{b}'\times\vec{b}$,即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$, 也就是 $\vec{r}$ 是可展曲面时,$K=0$.

反过来,当 $K=0$时,对于直纹面,有$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')^2=0\Leftrightarrow(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$,$\therefore$ 由P152页可展曲面的定义,知 $\vec{r}$ 是可展曲面.这样就证明了命题3,从而给出了本节命题3的又一种证法.

6 如何提高计算 K 的速度

另外,我们谈到了,

$$\because K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

$\therefore$ 当 $\vec{r}_{uu}$ 或 $\vec{r}_{vv}$ 中有一个为 $\vec{0}$,则不必计算另一个,且不必计算 L,N.或者当 L,N 中有一个为0,另一个不必计算.这样做题时,可以提高计算 K 的速度.例如本节P162第2题[2] 证明曲面:

$$\vec{r}=\{\cos v-(u+v)\sin v,\sin v+(u+v)\cos v,u+2v\}$$

是可展曲面.

证明 由本节命题3知,只须证 $K\equiv0$ 即可.

$$\because\quad \vec{r}_u=\{-\sin\ ,\cos v,1\},$$

$\therefore\vec{r}_{uu}=\{0,0,0\},\vec{r}_{uv}=\{-\cos v,-\sin v,0\},\ \therefore\vec{r}_{vv},L,N$ 不必计算.

又 $\because\vec{r}_v=\{-2\sin-(u+v)\cos v,2\cos+(u+v)(-\sin v),2\}$,

$$\therefore\ \vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\{(u+v)\sin v,-(u+v)\cos v,(u+v)\}}{\sqrt{EG-F^2}}\quad.$$

$$\because EG - F^2 > 0,\text{正定}.$$

$$\therefore K = \frac{-M^2}{EG - F^2}\quad .$$

$$\text{又}\because M = \vec{n}\cdot\vec{r}_{uv} = \frac{-(u+v)\sin v\cos v + (u+v)\sin v\cos v + o}{\sqrt{EG - F^2}} = 0,$$

$$\therefore \forall u,v \in R, LN - M^2 = 0 \Leftrightarrow K = 0 \Leftrightarrow \text{已知曲面}$$

$$\vec{r} = \{\cos v - (u+v)\sin v, \sin v + (u+v)\cos v, u + 2v\}$$

是可展曲面.

由本题的证明可以看出,计算 $K = 0$,甚至不必计算 E,F,G 及 L,N 这样做题的速度就可以提高了.本节的第3题的做法也类似上题,可以提高速度.

7 关于一个有代表性习题的推广

通过做一个典型代表的题而会做一类题.如本节第5题:求平面族 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha = 1$ 的包络.

解: $\because$ 已给平面族的判别曲面 S^* 为

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha = 1, & (5)\\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha - z\cos\alpha = 0. & (6)\end{cases}$$

对于每一固定的 α,有平面族中的一个平面,而平面上的每一点均为正常点,并且由于所求出的包络面上的每一点也是正常点(下面将求出).

$\therefore S^*$ 就是包络 S.

而由 $(5)^2 + (6)^2$,得 $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = 1$.

$$\because\ F = x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha - 1 = 0,$$

$$F_\alpha = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - z\cos\alpha = 0,$$

$$F_{\alpha\alpha} = -x\cos\alpha - y\sin\alpha + z\sin\alpha = 0,$$

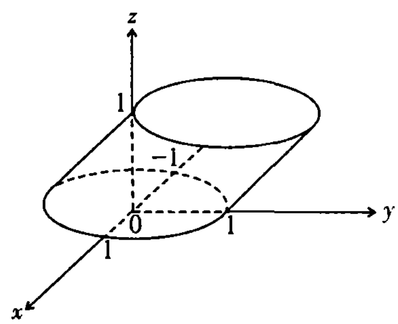

图2 平面族的包络图

$$\text{有}\ \Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

$\therefore$ 此包络是一柱面, $x^2 + (y - z)^2 = 1$ (椭圆柱面)[5],图形见图2.

这样,我们能够做下面的这类题:求平面族 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - az\sin\alpha = b$ (这里 a,b 是常数) 的包络,并画出它的图形,写出它的名称.用完全类似的方法,可以做出它的包络是椭圆柱面 $x^2 + (y - az)^2 = b^2$.图形略去.

[参 考 文 献]

[1] 苏步青,胡和生,等.微分几何[M].北京:人民教育出版社,1980.
[2] 梅向明,黄敬之.微分几何[M].北京:高等教育出版社,2001.
[3] 陈维桓.微分几何初步[M].北京:北京大学出版社,2003.
[4] 吴大任.微分几何讲义[M].北京:人民教育出版社,1982.
[5] 黄宣国.空间解析几何与微分几何[M].上海:复旦大学出版社,2003.