附录 D

关于微分方程的几个定理

D.1 线性齐次常微分方程组的解

定理 D.1 已知常微分方程组

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t), \quad 1 \le i \le n, \tag{D.1}$$

其中系数 $a_{ij}(t)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则对于任意给定的一组实数 x_i^0 $(1 \le i \le n)$, 存在唯一一组定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数 $x_i(t)$, $1 \le i \le n$, 满足微分方程组 (D.1) 和初值条件

$$x_i(a) = x_i^0, \quad 1 \le i \le n.$$

值得注意的是, 方程组 (D.1) 的解定义在整个指定的区间上, 而不仅仅是定义在一点的某个充分小的邻域上.

D.2 一次微分式积分因子的存在性

设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的两个连续可微函数. 考察微分方程

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0. \tag{D.2}$$

如果在区域 D 上存在连续函数 $\lambda(x,y)$ 和连续可微函数 $\phi(x,y)$ 使得

$$\lambda(x,y) \cdot (f(x,y)dx + g(x,y)dy) = d\phi(x,y), \tag{D.3}$$

则称 $\lambda(x,y)$ 是方程 (D.2) 的**积分因子**. 此时, 方程 (D.2) 有第一积分

$$\phi(x,y) = c.$$

关于方程 (D.2) 的积分因子的存在性有下面的定理.

定理 D.2 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 是定义在区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的两个连续可微函数. 如果在点 $(x_0,y_0)\in D$ 处 $f(x_0,y_0)$, $g(x_0,y_0)$ 不全为零, 则必 (x_0,y_0) 的一个邻域 $U\subset D$, 以及定义在 U 上的连续函数 $\lambda(x,y)$, 使得 $\lambda(x,y)$ 是方程 (D.2) 在区域 U 上的积分因子.

D.3 一阶偏微分方程组的可积性

定理 D.3 设一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}=f^i_\alpha(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n),\quad 1\le\alpha\le m,\ 1\le i\le n. \tag{D.4}$$

假定 $f^i_\alpha(x^\beta,y^j)$ 是定义在区域 $D=\widetilde{D}\times\mathbb{R}^n$ 上的连续可微函数, $\widetilde{D}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个区域. 对于任意给定的初始值

$$(x^1_0,\cdots,x^m_0,y^1_0,\cdots,y^n_0)\in D,$$

方程组 (D.4) 在点 $(x^1_0,\cdots,x^m_0)\in\widetilde{D}$ 的一个邻域 $U\subset\widetilde{D}$ 内有连续可微解

$$y^i=y^i(x^1,\cdots,x^m),\quad 1\le i\le n, \tag{D.5}$$

并满足初值条件

$$y^i(x^1_0,\cdots,x^m_0)=y^i_0,\quad 1\le i\le n. \tag{D.6}$$

(此时简称该方程组**完全可积**)的充分必要条件是, 在区域 D 上下述恒等式

$$\frac{\partial f^i_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial f^i_\beta}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial f^i_\alpha}{\partial y^j}f^j_\beta-\frac{\partial f^i_\beta}{\partial y^j}f^j_\alpha=0,\quad\forall\ i,\ \alpha,\ \beta$$

成立. 在此时, 方程组 (D.4) 在该点邻域内满足初值条件 (D.6) 的解是唯一的. 如果区域 $\widetilde{D}$ 是单连通的, 则函数 (D.5) 能够延拓为方程组 (D.4) 在整个区域 $\widetilde{D}$ 上的解.