

参数变换下曲线和曲面的不变量

李志虎

(指导教师: 刘建成)

摘要: 微分几何中, 曲线和曲面的各几何量的计算公式都依赖于所选的参数. 本文从参数变换入手, 详细验证了曲线的诸几何量: 弧长、曲率、挠率及曲面的诸几何量: 曲面上两方向的夹角、曲面的面积、曲面的曲率等都与坐标参数的选取无关. 这反映了曲线与曲面的几何性质不依赖于参数的选取.

关键词: 参数变换; 曲线; 曲面; 曲率; 挠率.

§1. 引言

微分几何中我们讨论的曲线和曲面都是以参数形式给出的, 而且曲线和曲面可以由不同的参数来表示, 当然不同参数的选取会给我们的讨论带来方便. 但在微分几何里主要研究的是正则曲线和正则曲面的几何不变量, 对于同一条正则曲线和同一个正则曲面, 不同参数的选择会不会影响它们的诸几何量呢? 本文将从参数变换入手, 详细证明了曲线的弧长、曲率、挠率及曲面的各内在量在参数变换下是不变的.

§2. 参数变换下曲线的不变量

2.1 曲线的参数变换

对于 $\mathbb{R}^3$ 中的一条曲线, 我们可以用不同的参数表示. 例如在 xOy 平面上, $\mathbf{r}(\theta) = \{\cos \theta, \sin \theta, 0\}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 表示单位半圆周; 我们也可以用 $\mathbf{r}(t) = \{t, \sqrt{1-t^2}, 0\}$, ($-1 \leq t \leq 1$) 表示这个半圆.

一般说来, 如果曲线 Γ 的参数方程为 $\mathbf{r}(t)$, 而用另一个新的参数 t^* 表示同一条曲线时, 我们要求 t 与 t^* 能够建立1-1对应. 为此要求参数变换式 $t = t(t^*)$ 满足 $\frac{dt}{dt^*} \neq 0$. 如果我们所讨论的是有向曲线, 则要求 $\frac{dt}{dt^*} > 0$, 即 $t(t^*)$ 是单调增函数, 这样同一条曲线 Γ 的参数方程为,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t(t^*)) = \mathbf{r}^*(t^*),$$

我们把这样的变换形式称为曲线的容许参数变换, 由上式可以得到,

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt^*},$$

所以根据正则曲线的概念, 如果曲线 Γ 在参数 t 时为正则曲线, 那么取参数 t^* 时也为正则曲线. 因此正则曲线的概念与参数选择无关.

2.2 参数变换下曲线的不变量

我们知道, 弧长是曲线本身的一个几何量, 所以它不受曲线方程的影响. 因此上我们说, 在参数变换下曲线的弧长应该不变.

设曲线 Γ 有两个不同的参数 t, t^* , 参数变换 $t = t(t^*)$, 且 $\frac{dt}{dt^*} \neq 0$, 那么

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t(t^*)) = \mathbf{r}^*(t^*),$$

对于曲线 $\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 上的任意的两个固定点 $P_0(t = t_0), P_1(t = t_1)$, 当选取 t^* 作参数时, P_0, P_1 的对应点分别 $P_0^*(t^* = t_0^*), P_1^*(t^* = t_1^*)$. 我们记 s 是曲线从 P_0 到 P_1 处的弧长, 在参数 t^* 下, 相应从 P_0^* 到 P_1^* 的弧长记为 s^* . 则有

$$s^* = \int_{t_0^*}^{t_1^*} \left| \frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*} \right| dt^* = \int_{t_0^*}^{t_1^*} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt^*} \right| dt^* = \int_{t_0^*}^{t_1^*} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \left| \frac{dt}{dt^*} \right| dt^*,$$

(1) 若 $\frac{dt}{dt^*} > 0$, 则 $\left| \frac{dt}{dt^*} \right| = \frac{dt}{dt^*}$, 因此

$$s^* = \int_{t_0^*}^{t_1^*} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \left| \frac{dt}{dt^*} \right| dt^* = \int_{t_0^*}^{t_1^*} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \frac{dt}{dt^*} dt^* = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = s,$$

(2) 若 $\frac{dt}{dt^*} < 0$, 则 $\left| \frac{dt}{dt^*} \right| = -\frac{dt}{dt^*}$, 因此

$$\begin{aligned} s^* &= \int_{t_0^*}^{t_1^*} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \left| \frac{dt}{dt^*} \right| dt^* = - \int_{t_0^*}^{t_1^*} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \frac{dt}{dt^*} dt^* \\ &= - \int_{t_1}^{t_0} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = s, \end{aligned}$$

两种情况得到同样的结果. 这就证明了弧长在参数变换不变.

熟知, 一条曲线的曲率刻画了它的弯曲程度, 挠率刻画它的扭转程度. 曲率和挠率如同弧长一样, 与曲线本身有关, 而与曲线的参数变换无关.

对于曲线 $\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 设有容许参数变换 $t = t(t^*)$, 且 $\frac{dt}{dt^*} \neq 0$, 则

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t(t^*)) = \mathbf{r}^*(t^*),$$

在参数 t 下, 曲线 Γ 的曲率和挠率的计算公式如下

$$k(t) = \frac{\left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|^3},$$

$$\tau(t) = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}, \frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3} \right)}{\left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \right)^2},$$

在参数 t^* 下, 曲线 Γ 的曲率和挠率的计算公式如下

$$k^*(t^*) = \frac{\left| \frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*} \times \frac{d^2\mathbf{r}^*(t^*)}{d(t^*)^2} \right|}{\left| \frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*} \right|^3},$$

$$\tau^*(t^*) = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*}, \frac{d^2\mathbf{r}^*(t^*)}{d(t^*)^2}, \frac{d^3\mathbf{r}^*(t^*)}{d(t^*)^3} \right)}{\left(\frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*} \times \frac{d^2\mathbf{r}^*(t^*)}{d(t^*)^2} \right)^2},$$

利用复合函数求导, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*} &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \frac{dt}{dt^*}, \\ \frac{d^2\mathbf{r}^*(t^*)}{d(t^*)^2} &= \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \frac{d^2t}{d(t^*)^2}, \\ \frac{d^3\mathbf{r}^*(t^*)}{d(t^*)^3} &= \frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3} \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^3 + 3 \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \frac{dt}{dt^*} \frac{d^2t}{d(t^*)^2} + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \frac{d^3t}{d(t^*)^3}, \end{aligned}$$

这时容易验证有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*} \times \frac{d^2\mathbf{r}^*(t^*)}{d(t^*)^2} &= \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^3, \\ \left| \frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*} \right|^3 &= \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|^3 \left| \frac{dt}{dt^*} \right|^3, \\ \left(\frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*}, \frac{d^2\mathbf{r}^*(t^*)}{d(t^*)^2}, \frac{d^3\mathbf{r}^*(t^*)}{d(t^*)^3} \right) &= \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}, \frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3} \right) \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^6, \end{aligned}$$

所以

$$k(t) = k^*(t^*), \quad \tau(t) = \tau^*(t^*).$$

这就证明了在参数变换下, 曲线的曲率、挠率是不变量.

§3. 参数变换下曲面的不变量

3.1 曲面的参数变换

如同曲线的参数表示一样, 曲面 S 的参数方程不是唯一的. 换言之, 可以用一组参数 (u, v) 和另一组参数 (u^*, v^*) 来表示同一曲面. 例如, 设 S 的参数方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in$

D , 令

$$\begin{cases} u = u(u^*, v^*), \\ v = v(u^*, v^*), \end{cases} \quad (u^*, v^*) \in D^*, \quad (2.1)$$

并假定雅可比行列式 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \neq 0$, 这样保证 (u, v) 与 (u^*, v^*) 是一一对应的. 那么曲面 S 的参数方程也可以用 (u^*, v^*) 来表示, 即

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*)) = \mathbf{r}^*(u^*, v^*),$$

这样的参数变换称为曲面的容许参数变换.

利用复合函数求导我们可以得到:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{u^*}^* = \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial u^*} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial u^*}, \\ \mathbf{r}_{v^*}^* = \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial v^*} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial v^*}, \end{cases} \quad (2.2)$$

所以,

$$\mathbf{r}_{u^*}^* \times \mathbf{r}_{v^*}^* = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)}, \quad (2.3)$$

故在容许参数变换下, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ 不受影响, 即曲面上正则点的概念与参数变换无关.

3.2 参数变换下曲面第一基量和第二基量的变化规律

在上节中已经讨论过了曲面的容许参数变换, 现在我们来讨论在容许参数变换下, 第一基本量和第二基本量的变化规律.

设参数变换

$$\begin{cases} u = u(u^*, v^*), \\ v = v(u^*, v^*), \end{cases} \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \neq 0,$$

其中 (u^*, v^*) 是新参数, 雅可比行列式 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \neq 0$ 就说明存在着逆变换 $u^* = u^*(u, v)$, $v^* = v^*(u, v)$, 或者说 $(u, v) \rightarrow (u^*, v^*)$ 是1-1对应的, 曲面的参数方程为:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*)) = \mathbf{r}^*(u^*, v^*).$$

我们把在新参数 (u^*, v^*) 下曲面的第一基本量记为 E^*, F^*, G^* , 第二基本量记为 L^*, M^*, N^* . 于是

$$\begin{cases} E^* &= E \frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial u^*} + F \left(\frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial u^*} + \frac{\partial v}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial u^*} \right) + G \frac{\partial v}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial u^*}, \\ F^* &= E \frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial v^*} + F \left(\frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*} + \frac{\partial v}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial v^*} \right) + G \frac{\partial v}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*}, \\ G^* &= E \frac{\partial u}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial v^*} + F \left(\frac{\partial u}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*} + \frac{\partial v}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial v^*} \right) + G \frac{\partial v}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*}, \end{cases} \quad (2.5)$$

这就是第一基本量在参数变换下的基本规律, 为了方便起见, 把(2.5)式改写成矩阵形式,

$$\begin{pmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u^*} & \frac{\partial v}{\partial u^*} \\ \frac{\partial u}{\partial v^*} & \frac{\partial v}{\partial v^*} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u^*} & \frac{\partial v}{\partial u^*} \\ \frac{\partial u}{\partial v^*} & \frac{\partial v}{\partial v^*} \end{pmatrix}^t \quad (2.6)$$

这里右端矩阵上角的“ t ”表示转置的意思.

由(2.3)有 $\mathbf{n}^* = \varepsilon \mathbf{n}$, 其中 $\varepsilon = \pm 1$, 为了保持曲面的定向, 以后取 $\varepsilon = 1$. 利用复合函数求导法则, 得到

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{u^*}^* = \mathbf{n}_u \frac{\partial u}{\partial u^*} + \mathbf{n}_v \frac{\partial v}{\partial u^*}, \\ \mathbf{n}_{v^*}^* = \mathbf{n}_u \frac{\partial u}{\partial v^*} + \mathbf{n}_v \frac{\partial v}{\partial v^*}, \end{cases} \quad (2.4)$$

于是

$$\begin{cases} L^* &= L \frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial u^*} + M \left(\frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial u^*} + \frac{\partial v}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial u^*} \right) + N \frac{\partial v}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial u^*}, \\ M^* &= L \frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial v^*} + M \left(\frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*} + \frac{\partial v}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial v^*} \right) + N \frac{\partial v}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*}, \\ N^* &= L \frac{\partial u}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial v^*} + M \left(\frac{\partial u}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*} + \frac{\partial v}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial v^*} \right) + N \frac{\partial v}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*}, \end{cases} \quad (2.7)$$

这就是第二类基本量在参数变换下的基本规律, 为了方便起见, 把(2.7)式改写成矩阵形式,

$$\begin{pmatrix} L^* & M^* \\ M^* & N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u^*} & \frac{\partial v}{\partial u^*} \\ \frac{\partial u}{\partial v^*} & \frac{\partial v}{\partial v^*} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u^*} & \frac{\partial v}{\partial u^*} \\ \frac{\partial u}{\partial v^*} & \frac{\partial v}{\partial v^*} \end{pmatrix}^t. \quad (2.8)$$

由上面得出的规律我们有以下引理:

引理1 曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 的第一基本量及第二类基本量在参数变换(2.1)下, 满足下列关系

$$\begin{aligned} E^* G^* - (F^*)^2 &= \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \right]^2 (EG - F^2), \\ L^* N^* - (M^*)^2 &= \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \right]^2 (LN - M^2), \\ L^* G^* - 2M^* F^* + N^* E^* &= \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \right]^2 (LG - 2MF + NE). \end{aligned}$$

3.3 参数变换下曲面的不变量

前一节我们讨论了在参数下曲面第一基量和第二基本量的变化规律, 现在我们利用这些规律讨论参数变换下, 曲面的几个不变量.

给出曲面上两个方向 $du: dv$ 和 $\delta u: \delta v$, 设它们之间的交角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E^2 du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E^2 \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}},$$

为了方便把上式写成矩阵形式即

$$\cos \theta = \frac{(du, dv) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}}{\sqrt{(du, dv) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}} \sqrt{(\delta u, \delta v) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}}}$$

令

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u^*} & \frac{\partial v}{\partial u^*} \\ \frac{\partial u}{\partial v^*} & \frac{\partial v}{\partial v^*} \end{pmatrix},$$

则在参数变换(2.1)下

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J^t \begin{pmatrix} du^* \\ dv^* \end{pmatrix}$$

因为在参数变换下 (u, v) 和 (u^*, v^*) 是1-1对应的, 所以有

$$(du^*, dv^*) = (du, dv)J^{-1},$$

$$\begin{pmatrix} du^* \\ dv^* \end{pmatrix} = (J^t)^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J^t,$$

因此

$$(du^*, dv^*) \begin{pmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^* \\ dv^* \end{pmatrix} = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},$$

$$(\delta u^*, \delta v^*) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u^* \\ \delta v^* \end{pmatrix} = (\delta u, \delta v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix},$$

$$(du^*, dv^*) \begin{pmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u^* \\ \delta v^* \end{pmatrix} = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix},$$

所以有

$$\begin{aligned}
\cos \theta^* &= \frac{(du^*, dv^*) \begin{pmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u^* \\ \delta v^* \end{pmatrix}}{\sqrt{(du^*, dv^*) \begin{pmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^* \\ dv^* \end{pmatrix}} \sqrt{(\delta u^*, \delta v^*) \begin{pmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u^* \\ \delta v^* \end{pmatrix}}} \\
&= \frac{(du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}}{\sqrt{(du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}} \sqrt{(\delta u, \delta v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}}} \\
&= \cos \theta.
\end{aligned}$$

所以说在参数变换下, 曲面上两方向夹角不变.

下面我们来看曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ 上某区域 $U \subset D$ 的面积. 设在参数 (u, v) 下, 参数区域 U 所对应的曲面域的面积 A , 则

$$A = \iint_U \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

若记在新参数 (u^*, v^*) 下, U 所对应的参数区域为 U^* , 并记参数区域 U^* 所对应的曲面域的面积 A^* , 则由上节的引理 1 及二重积分的变换公式知

$$\begin{aligned}
A^* &= \iint_{U^*} \sqrt{E^* G^* - F^{*2}} \, du^* \, dv^* \\
&= \iint_{U^*} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \right| \sqrt{EG - F^2} \, du^* \, dv^* \\
&= \iint_U \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \\
&= A,
\end{aligned}$$

由此可知在参数变换下, 曲面上某区域的面积不变.

为了证明法曲率也是参数变换下的不变量, 我们将曲面的第一、第二基本型改写成如下矩阵形式:

$$\begin{aligned}
I &= (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}, \\
II &= (du, dv) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

并记在新参数 (u^*, v^*) 下, 曲面的第一、第二基本型分别为 I^*, II^* , 而且对应的法曲率为 k_n^* , 则

$$\begin{aligned} k_n^* &= \frac{II^*}{I^*} = \frac{(du^*, dv^*) \begin{pmatrix} L^* & M^* \\ M^* & N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^* \\ dv^* \end{pmatrix}}{(du^*, dv^*) \begin{pmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^* \\ dv^* \end{pmatrix}} \\ &= \frac{(du, dv) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}}{(du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}} = \frac{II}{I} \\ &= k_n. \end{aligned}$$

这说明在参数变换下, 曲面的法曲率与参数的选择无关.

定理 1 曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ 的主曲率 k_1, k_2 在参数变换

$$\begin{cases} u = u(u^*, v^*), \\ v = v(u^*, v^*), \end{cases} \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \neq 0$$

下对应的主曲率分别为 k_1^*, k_2^* , 则有

$$\begin{aligned} k_1^* + k_2^* &= k_1 + k_2, \\ k_1^* \cdot k_2^* &= k_1 \cdot k_2. \end{aligned}$$

证明 在参数 (u, v) 下,

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \frac{NE - 2MF + LG}{EG - F^2}, \\ k_1 \cdot k_2 &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

根据引理 1, 在参数 (u^*, v^*) 下, 我们有

$$\begin{aligned} k_1^* + k_2^* &= \frac{N^*E^* - 2M^*F^* + L^*G^*}{E^*G^* - (F^*)^2} \\ &= \frac{\left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \right]^2 (LG - 2MF + NE)}{\left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \right]^2 (EG - F^2)} \\ &= \frac{NE - 2MF + LG}{EG - F^2} \\ &= k_1 + k_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1^* \cdot k_2^* &= \frac{L^* N^* - (M^*)^2}{E^* G^* - (F^*)^2} \\
&= \frac{\left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \right]^2 (LN - M^2)}{\left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \right]^2 (EG - F^2)} \\
&= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\
&= k_1 \cdot k_2,
\end{aligned}$$

从定理1的证明可以看出, 在参数变换下, 曲面的主曲率不变. 并且由高斯曲率和平均曲率的定义, 我们立即得到

定理 2 曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ 的高斯曲率 K 和平均曲率 H 在参数变换

$$\begin{cases} u = u(u^*, v^*), \\ v = v(u^*, v^*), \end{cases} \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \neq 0$$

下对应的高斯曲率和平均曲率分别为 K^*, H^* , 则有

$$K^* = K, \quad H^* = H,$$

即高斯曲率和平均曲率是参数变换的不变量.

定理 3 曲面上点的分类与曲面的参数选择无关; 曲面在一点邻近的形状与参数选择无关.

参考文献:

- [1] 王申怀, 刘继志, 微分几何, 北京: 北京师范大学出版社, 1998.
- [2] 沈纯理, 黄宣国, 微分几何, 北京: 经济科学出版社, 1997.
- [3] 陈维桓, 微分几何初步, 北京: 北京大学出版社, 1990.
- [4] 梅向明, 黄敬之, 微分几何, 北京: 高等教育出版社, 1988.
- [5] 虞言林, 郝凤歧, 微分几何讲义, 北京: 高等教育出版社, 1988.