第 1 卷第 3 期　辽宁师专学报　Vol. 1 No. 3
1999 年 9 月　Journal of Liaoning Teachers College　Sep. 1999

测地线定义的等价性

张跃辉
（朝阳师专　朝阳　122000）

摘　要　通过三维空间中二维曲面上测地线的几种定义的等价性的讨论，明确了这些不同的定义之间的内在联系，从而能加深对测地线相关内容的进一步理解.

关键词　测地线　曲率　活动标架

设 Σ 是空间一个曲面，方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$，$C$ 是 Σ 上的一条曲线，其参数方程为：

$C: u^i=u^i(s)$，$(i=1,2)$，其中 s 是 C 的弧长

又设 P 是 C 上一点，α、β、γ 分别是曲线 C 在 P 点的单位切向量、单位主法向量和单位付法向量，$\boldsymbol{n}$ 是曲面 Σ 在 P 点的单位法向量.

曲线 C 在 P 点的曲率向量 $k\beta$ 在单位向量 $\boldsymbol{n}\times\alpha$ 上的投影（即在曲面 Σ 上 P 点的切平面上的投影）称为曲线 C 在 P 点的测地曲率. 记作 $kg=(k\beta,\boldsymbol{n}\times\alpha)$，其中 k 是曲线 C 在 P 点的曲率.

定义 1　曲面上测地曲率恒等于零的曲线称为曲面上的测地线.

令 $\boldsymbol{e}_1=\alpha$，$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{n}\times\alpha$. 则 $\boldsymbol{e}_1(s)$，$\boldsymbol{e}_2(s)$，$\boldsymbol{e}_3(s)$ 构成曲线 C 上的单参数正交活动标架场. 关于此标架场有：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1=\omega_{12}\boldsymbol{e}_2+\omega_{13}\boldsymbol{e}_3=\mathrm{d}\alpha=k\mathrm{d}s\beta$$

$$kg=(k\beta,(\boldsymbol{n}\times\alpha))=[(\omega_{12}\boldsymbol{e}_2+\omega_{13}\boldsymbol{e}_3)/\mathrm{d}s]\cdot\boldsymbol{e}_2=\omega_{12}/\mathrm{d}s$$

因此：$kg=0\Leftrightarrow\omega_{12}=0$

定义 2　在曲面上的充分小邻域内，连接两点的曲线中弧长最短的曲线称为曲面上的测地线.

下面来证明定义 1 与定义 2 是等价的.

我们先来证明对曲面上充分小邻域 U 内的任意两点，连接此两点的所有曲线中测地线的弧长最短.

设 A、B 是 U 内的任意两点. C 是 U 内连接 A、B 两点的测地线. 因为 U 是曲面上充分小的一个邻域，所以可在 U 内选取半测地坐标网，即使得 U 内包含曲线 C 在内的测地线族为 u^1—曲线，它们的正交轨线为 u^2—曲线. 在此坐标网下，曲面的第一基本形式（线素）可写为：

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}u^1)^2+G(\mathrm{d}u^2)^2$$

设在此坐标网下 A、B 的曲纹坐标分别为 (u_1^1,u_0^2)，(u_2^1,u_0^2)，连接 A、B 两点曲线的弧长为：

收稿日期　1999—03—10

$$s=\int_{u_1^1}^{u_2^1}\sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+G\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\quad dt=\int_{u_1^1}^{u_2^1}\sqrt{(du^1)^2+G\ (du^2)^2}$$

$$=\int_{u_1^1}^{u_2^1}\sqrt{1+G\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2}du^1$$

显然若要 s 有最小值，必有 $du^2=0$，即曲线为 u^1—曲线，而 u^1—曲线是测地线，因此连接 A、B 两点的曲线中测地线弧长最短.

其次证明对曲面上充分小邻域 U 内的任意两点，连接此两点弧长最短的曲线必是测地线.

设 A、B 是 U 内的任意两点，C 是连接 A、B 两点弧长最短的曲线.

令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\ (t,\alpha)$ 是包含曲线 C 且均以 A、B 为端点的一族曲线. 其中 t 是曲线参数，当 $\alpha=0$ 时，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\ (t,0)$ 为曲线 C.

又设 A、B 对应的参数分别为 $t=a$，$t=b$，则：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\ (a,\alpha)$ 与 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\ (b,\alpha)$ 都是常向量.

取 $\boldsymbol{e}_1$ 是曲线的单位切向量，$\boldsymbol{e}_3$ 是曲面的单位法向量，则 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1$ 是曲面的单位切向量，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 都是 t、α 的函数，构成曲面上（U 上）的双参数正交活动标架.

$$d\boldsymbol{r}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}dt+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\alpha}d\alpha=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2+\boldsymbol{e}_2.$$

$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\alpha}$是曲面切向量，必可由 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 线性表示

设：$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$，其中 a_1、a_2 是 t、α 的函数 (1)

再设 $\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\right|=\theta$ 则：$d\boldsymbol{r}=\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\right|dt\cdot\boldsymbol{e}_1+\ (a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)\ d\alpha$

$$=\left(\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\right|dt+a_1d\alpha\right)\boldsymbol{e}_1+a_2d\alpha.\boldsymbol{e}_2=\ (\theta dt+a_1d\alpha)\ \boldsymbol{e}_1+a_2d\alpha\boldsymbol{e}_2$$

因此：$\omega_1=\theta dt+a_1d\alpha$，$\omega_2=a_2d\alpha$

$$d\omega_1=d\ (\theta dt+a_1d\alpha)\ =\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}d\alpha\wedge dt+\frac{\partial a_1}{\partial t}dt\wedge d\alpha \tag{2}$$

由结构方程得：$d\omega_1=\omega_{12}\wedge\omega_2=\omega_{12}\wedge a_2d\alpha=a_2\omega_{12}\wedge d\alpha$ (3)

由 (2) (3) 知：$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}dt=\frac{\partial a_1}{\partial t}dt-a_2\omega_{12}+bd\alpha$

曲线弧长：$l\ (\alpha)\ =\int_a^b\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\right|dt=\int\theta dt$

$$l'\ (\alpha)\ =\frac{dl\ (\alpha)}{d\alpha}\int_a^b\frac{\partial}{\partial\alpha}\ (\theta dt)\ =\int_a^b\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\cdot dt=\int_a^b\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}dt-a_2\omega_{12}+bd\alpha\right)$$

$$=\int_a^b\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot dt-\int_a^b a_2\omega_{12}+\int b\frac{d\alpha}{dt}\cdot dt=a_1\Big|_a^b-\int_a^b a_2\omega_{12}$$

因为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\ (a,\alpha)$，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\ (b,\alpha)$ 都是常向量，所以$\left.\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\alpha}\right|_{t=a,b}=\boldsymbol{o}$. 又由 (1) 知 $a_1\Big|_{t=a,b}=o$，因此 $l'\ (\alpha)\ =\int_a^b a_2\omega_{12}$，又当 $\alpha=0$ 时．曲线 C 弧长最短，因此曲线弧长的变分

$$l'(0)\ =-\int_a^b a_2\omega_{12}=0 \tag{4}$$

因为对任意选择的 a_2，(4) 都成立，因此有：沿曲线 C：$\omega_{12}=0$
又由前面的讨论知，$\omega_{12}=0 \Leftrightarrow kg=0$. 因此沿曲线 C：$kg=0$，即 C 是测地线.

到此我们证明了定义 1 与定义 2 的等价性.

在给出测地线的其它定义之前，先介绍一些有关的预备知识.

设 C：$u^i=u^i(t)$ ($i=1$、2) 是曲面 Σ 上的一条曲线，对曲线 C 上的任意一点 p，取 $\boldsymbol{e}_3$ 为曲面在此点的单位法向量，则 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 为曲面在此点的切向量，且 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 正交，则 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 构成曲线 C 上的单参数正交活动标架场. 沿曲线 C 关于此标架 ω_1、ω_2、ω_{12} 是 $u^i(t)$ 的一次微分形式. 因此 $\omega_1=\alpha_1\mathrm{d}t$、$\omega_2=\alpha_2\mathrm{d}t$、$\omega_{12}=\alpha_{12}\mathrm{d}t$. 其中 α_1、α_2、α_{12} 是 t 的函数

设 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$ 是微分方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\boldsymbol{P}=(\alpha_1\boldsymbol{I}_1+\alpha_2\boldsymbol{I}_2)\,\mathrm{d}t\\&\mathrm{d}\boldsymbol{I}_1=\alpha_{12}\boldsymbol{I}_2\mathrm{d}t\\&\mathrm{d}\boldsymbol{I}_2=-\alpha_{12}\boldsymbol{I}_1\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{5}$$

满足初始条件当 $t=t_0$ 时， $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{I}_1=\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{c}_2$ (6)

的解. 可以证明，若 $(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j)=\delta_{ij}$，则 $(\boldsymbol{I}_i, \boldsymbol{I}_j)=\delta_{ij}$ (i，$j=1$，2).

沿曲线 C，方程组 (5) 满足初始条件 (6) 的解 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(t)$，$\boldsymbol{I}_1=\boldsymbol{I}_1(t)$，$\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{I}_2(t)$. 可看作沿曲线 C 将曲面的切平面上的标架 $\{\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t)\}$ 分别依次落在 $\boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{a}$ 的切平面上，我们把切平面上的曲线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(t)$ 称为曲面曲线 C 在平面上的展开，可以证明，对不同的初始条件，即把曲线 C 展开在 C 的不同点的切平面上时，展开曲线是合同的.

在曲线 C 上给定曲面的切向量场 $\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{v}&=\mathrm{d}v_1\boldsymbol{e}_1+v_1\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1+\mathrm{d}v_2\boldsymbol{e}_2+v_2\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2\\&=\mathrm{d}v_1\boldsymbol{e}_1+v_1(\omega_{12}\boldsymbol{e}_2+\omega_{13}\boldsymbol{e}_3)+\mathrm{d}v_2\boldsymbol{e}_2+v_2(\omega_{21}\boldsymbol{e}_1+\omega_{23}\boldsymbol{e}_3)\\&=(\mathrm{d}v_1-\omega_{12}v_2)\,\boldsymbol{e}_1+(\mathrm{d}v_2+\omega_{12}v_1)\,\boldsymbol{e}_2+(\omega_{13}v_1+w_{23}v_2)\,\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

将向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 投影在切平面上得向量

$$\mathrm{D}v=(\mathrm{d}v_1-\omega_{12}v_2)\,\boldsymbol{e}_1+(\mathrm{d}v_2+\omega_{12}v_1)\,\boldsymbol{e}_2.$$

令 $\mathrm{D}v_1=\mathrm{d}v_1-\omega_{12}v_2$，$\mathrm{D}v_2=dv_2+\omega_{12}v_1$.

我们称 $\mathrm{D}v_1$，$\mathrm{D}v_2$ 为向量 $\boldsymbol{v}$ 沿曲线 $\boldsymbol{c}$ 的共变微分. $\mathrm{D}v_1=\mathrm{D}v_2=0$，则称向量 $\boldsymbol{v}$ 沿曲线 $\boldsymbol{c}$ 是平行的.

现在我们再给出测地线的两种定义方法.

定义 3 曲面上展开在平面上为直线的曲线称为曲面上的测地线.

定义 4 若沿曲面上曲线切向量的共变微分为零，则称此曲线为曲面上的测地线.

设曲面 Σ 上的曲线 C：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 展开在平面上得曲线 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$. 且沿此曲线：

$\omega_1=\alpha_1\mathrm{d}t$， $\omega_2=\alpha_2\mathrm{d}t$， $\omega_{12}=\alpha_{12}\mathrm{d}t$.

则在平面上 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\alpha_1\boldsymbol{I}_1+\alpha_2\boldsymbol{I}_2,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_1}{\mathrm{d}t}=\alpha_{12}\boldsymbol{I}_2,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_2}{\mathrm{d}t}=-\alpha_{12}\boldsymbol{I}_1\tag{7}$$

平面曲线 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$ 为直线的充要条件为其切向量 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\alpha_1\boldsymbol{I}_1+\alpha_2\boldsymbol{I}_2$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{o}$ 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha_1\boldsymbol{I}_1+\alpha_2\boldsymbol{I}_2)=\boldsymbol{o}$$

利用 (7) 计算可得： $$\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t}-\alpha_{12}\alpha_2\right)\boldsymbol{I}_1+\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}t}+\alpha_{12}\alpha_1\right)\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{o}$$

因此： $$\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t}-\alpha_{12}\alpha_2=0,\quad \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}t}+\alpha_{12}\alpha_1=0$$

即　$d\alpha_1-\omega_{12}\alpha_2=0$，　$d\alpha_2+\omega_{12}\alpha_1=0$.　$D\alpha_1=D\alpha_2=0$

但由$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2$　知 α_1，α_2 为曲线 C 的切向量的分量. 因此定义 3 与定义 4 的等价性得到证明.

最后我们来证明定义 1 与定义 4 的等价性. 为此先证明一个引理.

引理：若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(s)$ 是曲面 Σ 上曲线 C：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在平面上的展开曲线，s 是 C 的弧长参数，则 s 也是 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(s)$ 的弧长参数.

证：$(d\boldsymbol{p},d\boldsymbol{p})=(\alpha_1 ds\boldsymbol{I}_1+\alpha_2 ds\boldsymbol{I}_2,\ \alpha_1 ds\boldsymbol{I}_1+\alpha_2 ds\boldsymbol{I}_2)$

$=(\alpha_1 ds)^2+(\alpha_2 ds)^2=w_1^2+w_2^2=ds^2$. 证毕.

设 C：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(S)$ 为曲面 Σ 上的一条曲线，s 是弧长参数. 取 $\boldsymbol{e}_1$ 为曲线 C 的单位切向量，$\boldsymbol{e}_3$ 为曲面的单位法向量，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1$，则 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 构成曲线 C 上的单参数正交活动标架场. 且由前面的讨论知，关于此标架场，沿曲线 C，$kg=0\Leftrightarrow\omega_{12}=0$.

又由$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{e}_1$　知 $\alpha_1=1$，　$\alpha_2=0$.　因此对于曲线 C 的展开曲线 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(s)$　有　$\frac{d\boldsymbol{p}}{ds}=\boldsymbol{I}_1$，$\frac{d\boldsymbol{I}_1}{ds}=\alpha_{12}\boldsymbol{I}_2$. $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(s)$ 为直线 $\Leftrightarrow\frac{d\boldsymbol{I}_1}{ds}=\alpha_{12}\boldsymbol{I}_2=o\Leftrightarrow\alpha_{12}=0\Leftrightarrow\omega_{12}=0\Leftrightarrow kg=0$.　所以定义 1 与定义 4 是等价的.

到此测地线的四种不同定义的等价性全部证明完毕.

参考文献

1　梅向明，黄敬文．微分几何．北京：高等教育出版社，1981. 87～204.

2　方德植．微分几何基础．北京：科学出版社，1984. 56～166

3　栗田稔主编．黎曼几何：王运达，任彦成译．沈阳：东北大学，1982. 73～191

（责任编辑　任　冬）

（上接 7 页）

然后利用（19），即可得（19）的参数式通解为（20）.

注　视定理 8 中的 a 为 1，即为文〔2〕第 42 页的拉格朗日——达朗贝尔方程，视定理 8 中的 $\Psi(p)$ 为 p，即为文〔4〕第 12 页的引理 1.3.

参考文献

1　王高雄等编．常微分方程第二版．北京：高等教育出版社，1983. 35

2　E・卡姆克著．常微分方程手册．张鸿林译．北京：科学出版社，1977. 399，401

3　王寿生等编著．130 所高校研究生高等数学入学试题选解与分析．沈阳：辽宁科学技术出版社，1980. 635

4　汤光宋著．常微分方程专题研究．武汉：华中理工大学出版社，1994. 7

5　汤光宋．CLAIRAUT 型微分方程的再推广．安顺师专学报（自然科学版），1994，(2)：32～36

（责任编辑　任　冬）