经典 Liouville 定理证明的若干讨论

武利冲

（西北师范大学数学与信息科学学院，甘肃兰州，730070）

摘　要　本文从多重角度考虑经典 Liouville 定理的证明，并且在某些情况下作了些推广和延伸．重点介绍了改变度量后利用 Ahlfors-Schwarz 引理的 Liouville 定理的证明；次调和函数的分析方法 Liouville 定理的证明，文章最后给出了一种特殊的初等证法．

关键词　Liouville 定理; Poincar é 度量;Gauss 曲率;次调和函数

一、引　言

本文讨论的是经典 Liouville 定理，以后在文章中将简称为 Liouville 定理．该定理的重要性是显然的，早在 1975 年 Yau 就首先给出了 Liouville 定理在流形上的推广即非负 Ricci 曲率的完备非紧致 Riemann 流形上的正调和函数必为常数．最近 Ni-Tam 给出了 Liouville 定理在 Kähler 流形上的推广，得出下面定理：具有非负全纯双截曲率的完备非紧 Kähler 流形上，次对数增长的多重次调和函数必为常数，这使得流形上的调和函数成为研究流形几何性质的重要工具（详见文献[4]）．此外，在完全非线性椭圆方程以及在物理上均有相应的 Liouville 定理，并有广泛地应用．本文旨在讨论经典 Liouville 定理的证明，希望能够对定理有进一步的认识．Liouville 定理告诉我们有界整函数必恒为常数，它是关于复平面上解析函数的一个优美结果．该定理反映出复变函数的解析性与实函数的可微性之间存在很大差异，而且我认为该定理的本质是解析函数的外部边界值决定函数的内部值，而内部值会影响外部值的取定．这是一个非局部性命题．然而对于定义在整个实轴上的有界可微实函数其并不一定是常数，$f(x)=\sin x$ 即是一个很好的例子，但对于复数域上的解析函数却有这样的结论．

Liouville定理的证明在很多教科书中出现过，但是并没有标明定理提出的具体年限。由

文献[13]“Corollary 5.5 (Liouville's3 Theorem4). Every bounded entire function is constant. This theorem is for historical reasons erroneously attributed to Liouville. It was published earlier by Cauchy; in fact, Gauß may well have known about it before Cauchy's times.”所以可知该定理以Liouville命名是不实的，该定理早年是由Cauchy提出的，Gauss有可能比Cauchy更早知道该定理（详见文献[13]）. 一般教科书对Liouville定理的证明大多数是利用Cauchy不等式. 当然，在很多论文和一些教科书中也有Liouville定理的其他证法. 我采用下面几种方法来讨论Liouville定理，并在某些情况下作了些推广.

Ⅰ　Ahlfors-Schwarz引理是 1938 年Ahlfors所建立的，这条引理可以说是微分几何进入复分析的开始，定理中的域是$D(0,1)$，本文将其推广到更一般的$D(a,\alpha)$上来讨论. 定理是用Poincaré 度量来刻画的，文中将改变度量用椭圆度量替代Poincaré度量来讨论Liouville定理.

Ⅱ　由于解析函数和调和函数存在直接的关系，次调和函数和调和函数又有着很大的联系，通过上述三者来讨论Liouville定理，得到了R^2中有上界的或有下界的次调和函数必为常数的结果，并将其推广到高维空间上.

Ⅲ　最大模原理对于解析函数是极其重要的，文中用最大模原理证明了 Liouville 定理，并转换角度重新证明了 Liouville 定理的推广.

笔者查了一些相关资料(详见[2]、[4]、[10]、[11]、[12])，发现一些定理已经成为共知的结论。文中某些讨论和工作未能证明是创新的（在我的能力范围之内），但是，也未查到与之类似的证明. 经过讨论和研究，我在文章的最后提出了几个问题，作为今后的深入讨论.

二、主要工作

Step Ⅰ　为方便阅读，我们先介绍一些概念和术语.

(1)　Poincaré度量及椭圆度量

在单位圆 $D(0,1)=\{z \mid |z|<1\}$ 上取度量$\lambda(z)=\dfrac{2}{1-|z|^2}$即$ds_\lambda^2=\dfrac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$，称这个度量为**Poincaré度量**. Ω为复平面上的域，在Ω上取度量$\sigma(z)=\dfrac{2}{1+|z|^2}$即$ds_\sigma{}^2=\dfrac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$，称这个度量为**椭圆度量**.

(2)　在整个复平面上解析的函数称为**整函数**.

(3)　调和函数与次调和函数：如果二元实函数$H(x,y)$在区域D内有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程$\Delta H=0$，则称$H(x,y)$为区域D内的**调和函数**. 区域D内一个连续实函

数 $H(x,\ y)$称为是 D 中的一个**次调和函数**，如果对于域 $D'\subset D$ 内的任一调和函数 $U(x,\ y)$，差 $H-U$ 在 D'中恒满足极值原理.

(4) 度量和曲率

若Ω为$\boldsymbol{C}$中的域，在Ω上定义一个非负的c^2函数ρ，称之为**度量**，即 $ds_\rho^2=\rho^2|dz|^2$，由此得到距离函数d，在两点$z_1, z_2\in\Omega$之间的距离定义为$d(z_1, z_2)=\inf\int_\gamma \rho(z)\left|dz\right|$，这里inf 是在所有连接$z_1, z_2$两点且各点全在$\Omega$中的曲线$\gamma$上取的.

对度量ρ，可以定义**曲率** $K(z,\rho)=-\dfrac{\Delta\log\rho(z)}{\rho^2(z)}$，其中$\Delta$为 Laplace 算子，即

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial}{\partial z\partial\bar{z}}\\ &=4\frac{\partial}{\partial\bar{z}\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\end{aligned}$$

其中$z=x+iy=e^{i\theta}$.

Step Ⅱ 用微分几何的观点来认识 Liouville 定理

定理 1[1] 若整函数$f(z)$将$\boldsymbol{C}$映到U，如果在U上引入一个度量ρ，即 $ds_\rho^2=\rho^2|dz|^2$，使得对任意$z\in U$，其曲率$K(z,\rho)$满足$K(z,\rho)\le -B<0$，这里B为正的常数，则$f(z)$必为常数.

为证明该定理需要引入下面的命题和定理

命题 1 上述定义的曲率 $K(z,\rho)=-\dfrac{\Delta\log\rho(z)}{\rho^2(z)}$ 与通常微分几何中定义的 Gauss 曲率相一致.

证明 由微分几何知识可知，给出了度量就相当于给出了曲面的第一基本形式 $I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$，而由高斯的著名定理——曲面的高斯曲率是内蕴量，而在上述的曲面是正交网，故$F=0$. 对于域Ω而言$u=x$, $v=y$. 此时

$$K=\frac{-1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\frac{(\sqrt{G})_v}{\sqrt{E}}\right)_v\right] \tag{1}$$

故有

$$
\begin{aligned}
ds_\rho^2 &= \rho^2 \left|dz\right|^2 \\
&= \rho^2(x,y)\left|dx^2+dy^2\right| \\
&= \rho^2(x,y)dx^2+\rho^2(x,y)dy^2
\end{aligned}
$$

于是可知 $$E=\rho^2(x,\ y), G=\rho^2(x,\ y), \tag{2}$$

将(2)代入高斯曲率公式(1)可知 $K(z,\rho)=K$．于是上述定义的曲率与通常微分几何中定义的 Gauss 曲率相一致．　　　　证毕．

命题 2　曲率 $K(z,\rho)=-\dfrac{\Delta\log\rho(z)}{\rho^2(z)}$ **是全纯映射下的不变量．**

讨论：若Ω_1及Ω_2为$\boldsymbol{C}$中两个域，f为Ω_1上的全纯函数，将Ω_1映为Ω_2，若ρ为Ω_2上的一个度量，且f'不恒为零，则$f^*\rho=(\rho\circ f)|f'|$，于是定义了在$\Omega_1$上的一个度量，这度量称之为由度量$\rho$ 通过$f(z)$拉回来到Ω_1上的度量．下面要证的是$K(z,f^*\rho)=K(f(z),\rho)$．

证明　由全纯函数和调和函数性质可知$\Delta\log|f'(z)|=0$，以及

$$
\begin{aligned}
\Delta\log(\rho\circ f(z)) &= 4\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{\partial}{\partial z}\log(\rho\circ f(z)) \\
&= 4\frac{\overline{\partial f}}{\partial\bar z}\frac{\partial f}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial f}\frac{\partial}{\partial\bar f}\log(\rho\circ f)\right\} \\
&= |f'(z)|^2(\Delta_f\log\rho)\circ f(z).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
K(z,f^*\rho) &= -\frac{\left|f'(z)\right|^2(\Delta_f\log\rho)\circ f(z)}{(\rho\circ f(z))^2\left|f'(z)\right|^2} \\
&= -\frac{(\Delta_f\log\rho)\circ f(z)}{(\rho\circ f(z))^2} \\
&= K(f(z),\rho).
\end{aligned}
$$

证毕．

定理 2（Ahlfors-Schwarz引理）[1]　设$f(z)$为$D(0,1)$上的全纯函数，$f(z)$将$D(0,1)$全纯地映为U，如果在U上引入一个度量ρ，即 $ds_\rho^2=\rho^2|dz|^2$，使得其曲率在U上任一点都≤ -1，则

$$f^*\rho\le\lambda(z)\text{其中 }\lambda(z)=\frac{2}{1-\left|z\right|^2},$$

即 $ds_\rho^2\le ds_\lambda^2$ 也就是经过映射后，度量不增加．

Ahlfors-Schwarz 引理有更一般的形式，在 $D(0,\alpha)(\alpha>0)$上定义度量

$$\lambda_{\alpha}^{A}(z)=\frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^{2}-|z|^{2})},$$

其中 $A>0$，则这个度量在 $D(0,\alpha)$ 中任一点上，其曲率为 $-A$.

定理 3（一般形式的Ahlfors-Schwarz引理）[1] 假设 $f(z)$ 为 $D(0,\alpha)$ 上的全纯函数，$f(z)$ 将 $D(0,\alpha)$ 全纯地映为 U，如果在 U 上引入一个度量 ρ，即 $ds_{\rho}^{2}=\rho^{2}|dz|^{2}$，使得其曲率在 U 上任一点都 $\leq -B$，则

$$f^{*}\rho(z)\leq\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\lambda_{\alpha}^{A}(z) \text{ 其中 } \lambda_{\alpha}^{A}(z)=\frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^{2}-|z|^{2})}$$

对每个 $z\in D(0,\alpha)$ 都成立，这里 B 为正的常数.

下面用定理 1 来证明 Liouville 定理.

证明 若 $f(z)$ 为有界整函数，所以可以找到一个正的常数 M，使得 $|f(z)|\leq M$，当 $z\in \boldsymbol{C}$ 时都成立. 于是全纯函数 $\frac{1}{M}f(z)$ 将 $\boldsymbol{C}$ 映到 $D(0,1)$ 之内，而在 $D(0,1)$ 上显然可以取度量 λ，其曲率为 -1，故在上面的定理 1 中取 $B=1$，得 $\frac{1}{M}f(z)$ 必为常数，故 $f(z)$ 必为常数，这就证明了 Liouville 定理. 证毕.

StepⅢ 在域 $D(\alpha,1)$ 上证明 Liouville 定理

定理 4 设 $f(z)$ 为 $D(\alpha,1)$ 上的全纯函数，$f(z)$ 将 $D(\alpha,1)$ 全纯地映为 U，如果在 U 上引入一个度量 ρ，即 $ds_{\rho}^{2}=\rho^{2}|dz|^{2}$，使得其曲率在 U 上任一点都 ≤ -1，则

$$f^{*}\rho(z)\leq\lambda(z)$$

即 $ds_{\rho}^{2}\leq ds_{\lambda}^{2}$ 经过映射后度量不增加.

为证明该定理需引入下面的定理

定理 5（单值化定理）[1] 任意单连通的Riemann曲面一定一对一地全纯等价于下列三个区域之一：单位圆、复平面 $\boldsymbol{C}$、扩充复平面 $\boldsymbol{C}^{*}$，即Riemann球面 S^{2}.

定理 6（Riemann映射定理）[1] 若 $U\subseteq\boldsymbol{C}$ 为单连通区域，其边界点多于一点，z_0 为 U 中任意一点，则在 U 上存在唯一的一个单叶全纯函数 $f(z)$，将 U 映到单位圆 $D(0,1)$ 上，且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)>0$.

定理 4 的证明

讨论：我们由 Riemann 映射定理可以知道，单叶全纯函数 g: $D(0,1)\rightarrow D(\alpha,1)$ 必定存在

且唯一，并且由f，g 皆是全纯函数，则可断言$f\circ g$ 亦必是单叶全纯函数.

证明 由 Riemann 映射定理可以知道，g: $D(0,1)\to D(\alpha,1)$必定存在且唯一，我们知道$f\circ g:D(0,1)\to U$ 由 Ahlfors-Schwarz 引理，$(f\circ g)^*\rho(z)\le\lambda(z)$其中$\lambda(z)=\dfrac{1}{1-|z|^2}$即$ds_\rho^2\le ds_\lambda^2$也就是经过映射后，度量不增加.

$(f\circ g)^*\rho(z)$为 $D(0,1)$上的度量，g 为单叶全纯函数且保形，映射只做了个平移. 再由 Ahlfors-Schwarz 引理和曲率是全纯映射下的不变度量，g 为单叶全纯函数且保形不改变距离，可知

$$(f\circ g)^*\rho(z)=\rho(f(g(z)))|f'(g(z))g'(z)|$$

其中 $g'(z)=1$，而 $$f^*\rho(\omega)=\rho(f(\omega))|f'(\omega)|$$

因f是定义在 $D(\alpha,1)$上的函数故 $\omega=g(z)$. 于是

$$(f\circ g)^*\rho=f^*\rho\le\lambda\text{，故}f^*\rho(z)\le\lambda(z).$$ 证毕.

引入度量$\lambda_\alpha^A=\dfrac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2-|z|^2)}$这里 $A>0$. 则这个度量在 $D(0,\alpha)$中任一点曲率为$-A$. 进一步下面的定理成为显然.

定理 7 假设$f(z)$为$D(a,\alpha)$上全纯函数，将$D(a,\alpha)$映为U，如在U上可以引入一个度量ρ，即$ds_\rho^2=\rho^2(z)dz^2$，使得其曲率在U上任一点都小于$-B$，则 $f^*\rho(z)\le\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\lambda_\alpha^A(z)$对每个$z\in D(a,\alpha)$都成立，这里$B$为正常数.

StepⅣ 用椭圆度量来考虑 Liouville 定理的证明.

在 Ahlfors-Schwarz 引理中，我们以 Poincaré度量为研究对象，下面换一种度量来研究 Liouville 定理.

在上述的研究中，我们始终以 Poincaré度量为研究对象，下面欲证引进椭圆度量 $\sigma(z)$后仍可证明 Liouville 定理.

定理 1 若整函数$f(z)$将$\boldsymbol{C}$映到U，如果在U上引入一个度量ρ，即$ds_\rho^2=\rho^2|dz|^2$，使得对任意$z\in U$，其曲率$K(z,\rho)$满足$K(z,\rho)\le-B<0$，这里B为正的常数，则$f(z)$必为常数.

证明 对任意 $\alpha>0$，$f(z)$将 $D(0,\alpha)$映到 U 之内，在 $D(0,\alpha)$利用椭圆度量$\sigma(z)=\dfrac{1}{1+|z|^2}$上定义度量

$$\sigma_\alpha^A = \frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2 + |z|^2)}, A > 0$$

显然在 $D(0,\alpha)$ 中任一点，其曲率均为 A．定义函数

$$v(z) = \frac{f^* \rho(z)}{\sigma_\alpha^A(z)}$$

则在 $D(0,\alpha)$ 上 $v(z)$ 是非负的连续函数，$f^* \rho(z)$ 在 $\overline{D(0,\alpha)}$ 上有界的，且 $\sigma_\alpha^A(z)$ 为连续的正值函数，所以 $v(z)$ 只能在 $D(0,\alpha)$ 的某点 τ 处取得极大值．

(1) 若有 $f^* \rho(\tau) = 0$ 则由 α 的任意性及零点的惟一性可知 $\alpha \to +\infty$ 由于 $f(z)$ 为全纯函数，所以 $f(z) =$ 常数．

(2) 不妨假设 $f^* \rho(\tau) > 0$，因此，由定理 1 中假设 $K(\tau, f^* \rho) \le -B$ 由于 $\log v(z)$ 在 τ 点处取得极大值故有

$$\begin{aligned} \Delta \log v(\tau) &= \Delta \log f^* \rho(\tau) - \Delta \log \sigma_\alpha^A(\tau) \le 0 \\ &= -K(\tau, f^* \rho)(f^* \rho(\tau))^2 + K(\tau, \sigma_\alpha^A)(\sigma_\alpha^A(\tau))^2 \\ &\ge B(f^* \rho(\tau))^2 + A(\sigma_\alpha^A(\tau))^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^* \rho(z) \le -\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \sigma_\alpha^A(z)$$

此时得出 $f^* \rho(z) \le 0$，矛盾！由(1)的结论，故 $f^* \rho(z) = 0$，$\Rightarrow f(z)$ 必为常数．

综合(1)、(2)可知 $f(z)$ 必为常数． 证毕．

相应地，如果我们引入椭圆度量来描述 U 上的曲率，将 Ahlfors-Schwarz 引理中的 U 中曲率改为≥1 或≤1，则会有什么样的结果？

仿照Ahlfors-Schwarz引理的证明[1].

3.1 U 中曲率改为≥1

任意固定 $r \in (0,1)$，在以原点为中心，r 为半径的圆 $D(0,r)$ 上定义度量 $\sigma_r(z) = \dfrac{2r}{r^2 + z^2}$，显然在 $D(0,r)$ 中任一点上，其曲率均为 1．定义函数

$$v(z) = \frac{f^* \rho(z)}{\sigma_r(z)}$$

我们知道 $v(z)$ 是 $\overline{D(0,r)}$ 上的非负有界函数，则必在 $\overline{D(0,r)}$ 上取得极大值 τ 和极小值 α. 令 $r \to 1-0$，就可得到 $\sigma_r(z) \to \sigma(z)$．于是

$$\begin{aligned}\Delta\log v(\tau) &= \Delta\log f^*\rho(\tau) - \Delta\log\sigma_r(\tau) \le 0 \\ &= -K(\tau, f^*\rho)(f^*\rho(\tau))^2 + K(\tau,\sigma_r)(\sigma_r(\tau))^2 \\ &\le -(f^*\rho(\tau))^2 + (\sigma_r(\tau))^2\end{aligned}$$

不可确定 $v(z)$的极大值是否≤1，但

$$\begin{aligned}\Delta\log v(\tau) &= \Delta\log f^*\rho(\tau) - \Delta\log\sigma_r(\tau) \ge 0 \\ &= -K(\tau, f^*\rho)(f^*\rho(\tau))^2 + K(\tau,\sigma_r)(\sigma_r(\tau))^2 \\ &\le -(f^*\rho(\tau))^2 + (\sigma_r(\tau))^2\end{aligned}$$

可确定 $v(z)$的极小值≤1.

3.2 U 中曲率改为≤1

同理按照上面的定理可确定 $v(z)$的极大值≤1 但极小值不确定.

于是椭圆度量经过全纯映射后不可确定其是否增加或减少，这对于我们研究 Liouville 定理是不方便的．事实上我们知道一个平面区域 $G \subset \boldsymbol{C}$，若它的余集（包括∞）多余两个点，则 Poincaré度量是该区域上的超双曲度量中的最大者，对于椭圆度量，其曲率为 1，不可作为分界线，没有像 Poincaré度量那么好的性质.

Liouville 定理的证明．我们可以利用定理 4 和定理 7 给出 **Liouville** 定理的证明，但证明过程类似于利用定理 1 的证明过程，这里就不再赘述.

由 Liouville 定理知道：若整函数 $\omega = f(z)$将 $\boldsymbol{C}$ 映到有界域，则 $f(z)$必为常数．若整函数 $\omega = f(z)$将 $\boldsymbol{C}$ 映到无界域 U，即使 $\boldsymbol{C}\backslash U$ 是一个线段，这个整函数仍可为常数，不但如此，显然可见，我们可以取这根线段的长度为任意小的正数，这时候 $f(z)$仍为常数．一般的，我们有如下定理：

定理 8（Picard小定理）[1] 若整函数$\omega = f(z)$将$\boldsymbol{C}$映到U，而$\boldsymbol{C}\backslash U$至少包含两点，则$f(z)$必为常数.

Step Ⅴ 利用调和函数和次调和函数来考虑 Liouville 定理的证明

如果设函数 $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$，由 f(z)的解析性可知二元实函数 $u(x, y)$，$v(x, y)$都是调和函数，而 $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$恒为常数等价于 $u(x, y)$，$v(x, y)$同时恒为常数，一个自然的问题：能否从调和函数 $u(x, y)$，$v(x, y)$入手来证明 Liouville 定理呢？事实上

定理 9[2] **有上界或有下界的调和函数必为常数.**

于是可知Liouville定理成为显然，说明这是强于Liouville定理得结果．这个定理的证明可以利用下面的引理证明．对于调和函数$u(x, y)$和任意的常数c，易知$-u(x, y)$和$u(x, y)+c$都是调和函数，所以要证明定理 9，只需要证明$u(x, y) \ge 0$ 的情形就可以了．设$\Omega \subset R^2$是单连通域，

$B_{(x,y)}(r)\subset\Omega$表示任意的以$(x, y)$为中心，以$r$为半径的开圆域，$u(x, y)\in C(\Omega)$.

引理 1[2]　设$u(x, y)\in C(\overline{B}_{(x_0,y_0)}(r))$**是非负的调和函数，则有下面的估计：**

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\le\frac{2}{r}u(x_0,y_0)\text{ 和 }\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\le\frac{2}{r}u(x_0,y_0)$$

由上面的引理可知，当取极限$r\to+\infty$时，则有$\dfrac{\partial u}{\partial x}=0=\dfrac{\partial u}{\partial y}$由点$(x, y)$的任意性得到$u(x, y)$恒为常数. 定理 9 得证.　　证毕.

此外定理 9 可以利用Hanack不等式证明[2].

Hanack 不等式：设$u(x, y)\in C(\overline{B}_{(x_0,y_0)}(r))$是非负的调和函数，则有不等式：

$$\frac{r-d}{r+d}u(x_0,y_0)\le u(x,y)\le\frac{r+d}{r-d}u(x_0,y_0),d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\ .$$

由上面的**Hanack**不等式可知，只需取极限$r\to+\infty$时，可得$u(x, y)=u(x_0, y_0)$，因为(x, y)是任意的，所以$u(x, y)$恒为常数，定理 9 得证.　　证毕.

推广：在高维欧氏空间上有

定理 10[2]　**有上界或有下界的调和函数**$u(x_1, x_2,\cdots, x_n)$**必为常数.**

现在我们证明次调和函数同样有如此好的性质.

定理 11　有界次调和函数 $u(z)$**必为常数.**

命题 3　次调和函数$u(z)$**对于每一圆盘**$|z-z_0|\le r$，$u(z)$**恒满足不等式**

$$u(z_0)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

命题 4[5] $u(x, y)$是$\Omega\subset R^2$中次调和函数，$B(a,\rho)\subset\Omega$为开圆域，$\Omega\subset R^2$是单连通域，$a=(x_0, y_0)$，$u(x, y)\in C(\Omega)$. 在圆周$C(a,\rho)$上定义Possion积分$P_u(z)$，令$|z-a|^2=r^2$，

$$P_u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{i\theta})\frac{\rho^2-|z-a|^2}{\left|\rho e^{i\theta}-(z-a)\right|^2}d\theta$$

由次调和函数性质，$P_u(z)$为$B(a,\rho)\subset\Omega$上的调和函数，并且满足平均值性质.

命题 5 上述的调和函数$P_u(z)$**满足以下两个性质：**

1、$P_u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi\rho}\displaystyle\int_{\partial B_{(x_0,y_0)}(\rho)}P_u ds$

2、$P_u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{\pi\rho^2}\displaystyle\int_{B_{(x_0,y_0)}(\rho)}P_u dxdy$

证 明　由调和函数 $P_u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_u(a+r\,\mathrm{e}^{i\theta})d\theta$，此时 $0<r<+\infty$ 有 $d\theta=\frac{1}{r}ds$，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$．于是得到

$$\begin{aligned}P_u(a)&=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}P_u(x,y)ds\\&=\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_{(x_0,y_0)}(r)}P_u(x,y)ds\end{aligned}$$

在上式中用ρ替代 r，得　$P_u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi\rho}\int_{\partial B_{(x_0,y_0)}(\rho)}P_u ds$．

于是 $\rho P_u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_{(x_0,y_0)}(\rho)}P_u ds$，两边对$\rho$求 $0\to R$ 的积分，得到

$$P_u(x_0,y_0)\int_0^R\rho d\rho=\frac{1}{2\pi}\int_0^R d\rho\int_{\partial B_{(x_0,y_0)}(\rho)}P_u ds\Rightarrow P_u\frac{1}{2}R^2=\frac{1}{2\pi}\iint_{B_{(x_0,y_0)}(\rho)}P_u d\sigma,$$

而 $d\sigma=dxdy$ 可知　$P_u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi\rho^2}\int_{\partial B_{(x_0,y_0)}(\rho)}P_u dxdy$．　证毕．

定理 11 的证明　我们知道在$B(a,\rho)\subset\Omega$ 上有$u\le P_u$，在圆周$\partial B(a,\rho)$上$u=P_u$．若$u(x, y)$为有界函数，则$P_u(x,y)$亦必为有界函数，则$\exists c$，使得

$$c+u(x,y)\ge 0,\ c+P_u(x,y)\ge 0$$

即为非负的有界次调和函数．于是有由命题 5 和引理 1 得

$$\left|\frac{\partial(c+P_u(x,y))}{\partial x}(x_0,y_0)\right|=\left|\frac{\partial P_u(x,y)}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\le\frac{1}{\rho}P_u(x_0,y_0)\tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial(c+P_u(x,y))}{\partial y}(x_0,y_0)\right|=\left|\frac{\partial P_u(x,y)}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\le\frac{1}{\rho}P_u(x_0,y_0)\tag{4}$$

于是对上面(3)、(4)式中令$\rho\to+\infty$故P_u为常数m．而

$$P_u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{i\theta})\frac{\rho^2-|z-a|^2}{|\rho e^{i\theta}-(z-a)|^2}d\theta$$

$$P_u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{i\theta})d\theta=m$$

而在 $\overline{B(a,\rho)}$ 内 $u(a+\rho e^{i\theta})\le P_u(a)$，不妨设 $u(\beta)<P_u(a)$ 即 $\exists\ \beta,\beta=a+\rho_1e^{i\theta}$ 其中 $\rho_1=|a-\beta|,\theta_1\in[0,2\pi]$，由于$u$的连续性，存在区间$I\subset[0,2\pi]$使得$\theta_1\in I$，并且$\forall\ \theta\in I$，有 $u(a+\rho_1e^{i\theta})<P_u(a)=m$，于是

$$m = P_u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+\rho e^{i\theta})d\theta < m$$

矛盾！因此在$\overline{B(a,\rho)}$上，$u = P_u = m$．由a点任意性，故u为常数m． 证毕．

接下来证明有上界或有下界的次调和函数也有如此性质．

定理 12　有上界的或有下界的次调和函数必为常数．

证明　在复平面 $\boldsymbol{C}$ 上，分下面两种情况讨论：

(Ⅰ)　若$u(x, y)$有下界，则$\exists C$使得$u(x, y)+ C \geq 0$,故$P_u(x, y) \geq 0$，由命题 4 和定理 9 可知调和函数$P_u(x, y)$＝常数，于是由定理 11 可知u＝常数．

(Ⅱ)　若$u(x, y)$有上界的次调和函数，则$u(x, y) \leq M$,而$-u(x, y)$不一定为次调和函数，但$-u(x, y) \geq -M$，作Possion积分构造调和函数P_u，$-u(x, y) \geq -M$有下界，则$-P_u$亦有下界，由Ⅰ的结论可知$-P_u$＝常数，由x，y的任意性，可知u＝常数． 证毕．

故有上界的或有下界的次调和函数必为常数．自然地，将该结论推广到高维空间R^n上，有

定理 13　有上界或有下界的次调和函数$u(x_1, x_2,\cdots, x_n)$必为常数．

StepⅥ　初等方法证明 Liouville 定理以及 Liouville 定理的推广

证明　由 Liouville 定理的条件可知，若$f(z)$非常数，则$\exists R,M$使得$|f(z)|$在闭圆$\overline{B(0,R)}$上取得最大值 M，而$f(z)$为复平面上的整函数，故$|f(z)|$亦在闭圆$\overline{B(0,R+1)}$上取得最大值 M，由最大模原理可知矛盾！于是$f(z)$必为常数． 证毕．

由 Cauthy 积分公式可知，该定理的本质是解析函数的外部边界值决定函数的内部值，而内部值会影响外部值的取定．这是一个非局部性命题，也是模有界定理，其逆也真，即有常数是有界整函数；此定理的逆否定理为：非常数的整函数必无界．

Liouville定理的推广：设$f(z)$是一个整函数，且假定存在着一个正整数n，以及两个正数R与M，使当$|z| > R$时，$|f(z)| \leq M|z|^n$．试证明$f(z)$是一个至多n次的多项式或一常数．

证明　由[4]可知$f(z)$必是一多项式．下面反设$f(z)$是大于n次的多项式，$\exists m$使得$\varphi(z)$=mz^n+1 在复平面的圆$C(0,\alpha)$上（α足够大）满足$|\varphi(z)| > |f(z)|$，由儒歇定理可知，$\varphi(z)$与$f(z)$+$\varphi(z)$有同样多的零点，而$f(z)$大于n次，故$f(z)$+$\varphi(z)$的次数超过n次，由代数基本定理可知$f(z)$+$\varphi(z)$的零点多于n个，矛盾！$f(z)$是一个至多n次的多项式或一常数． 证毕．

三、结束语

正如引言中所述本文从不同角度对 Liouville 定理进行了认识，当然对该类问题的探讨还有很多，这仅是我个人的一点微薄见解，错误和不足之处在所难免．在证明过程中产生以下疑问，这些疑问在笔者的能力范围内未能给予证明，当然也不可确认某些问题是正确的，只是浅薄地谈了对这些问题的一些看法．

1、椭圆度量没有像 Poincaré度量那么好的性质，从几何角度考虑这意味着什么？

2、椭圆度量的曲率为 1，可以作为研究曲率大于等于 1 度量的分界线吗？

3、研究曲率可以分为 -1，0，1，但研究度量却没有这样的对称性．那么欧氏度量在特定条件下是否具有 Poincaré度量那么好的性质呢？

4、是否存在映射 f，使得椭圆度量在 f 的作用下度量不增？

5、Liouville 定理提出的具体时间是那一年？该定理提出的物理背景是什么？

参考文献

[1]龚升.简明复分析[M].北京:北京大学出版社，1996.

[2]焦振华，邓琴.关于刘维尔定理的一个注记[J].杭州电子科技大学学报，2006.

[3]钟玉泉.复变函数[M].北京:高等教育出版社，1999.

[4]David H.ARMITAGE.A Liouville theorem for polyharmonic functions[J].HIROSHIMA MATH，2000.

[5]梅向明，黄敬之.微分几何[M].北京:高等教育出版社，1999.

[6]杨林生.复变函数[M].北京:高等教育出版社，1999.

[7]张锦豪.复变函数论[M].北京:高等教育出版社、施普林格出版社，1999.

[8]亨利·嘉当.解析函数论初步[M].余家荣译.北京:高等教育出版社，1999.

[9]张南岳，徐怀惠.复变函数论选讲[M].北京:北京大学出版社，1999.

[10]陆全康.推广的刘维尔定理和刘维尔方程[J].复旦学报，1999.

[11]杨乔华，H 型群上的非线性 Liouville 定理[J].数学年刊，2006.

[12]阮其华.黎曼流形上的刘维尔定理[J].北华大学学报，2005.

[13]Matthias Beck， Gerald Marchesi， and Dennis Pixton.A First Course in Complex Analysis[M]. www.math.binghamton.edu，2002.

The statements of the proof of Liouville theorem

Wu Lichong

(College of Mathematics and Information Science，Northwest Normal University　Lanzhou Gansu 730070)

Abstract　In this paper we prove the Liouville theorem in some approaches，then generalize it in some cases．Especially the proof of Liouville theorem by the Ahlfors-Schwarz lemma under the changed metric and the proof by the subharmonic function are gived．At the end of the paper ，we give another special proof of the Liouville theorem．

Key words　Liouville theorem; Poincaré metric; Gauss curvature; subharmonic function