《微分几何》第 80 页习题解答

1. 求双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{a(u+v),b(u+v),2uv\}$ 的第一基本形式.

解： 直接计算可得 $\boldsymbol{r}_u=\{a,b,2v\}$, $\boldsymbol{r}_v=\{a,-b,2u\}$. 由此得到双曲抛物面的第一类基本量为

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=a^2+b^2+4v^2,$$
$$F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=a^2-b^2+4uv,$$
$$G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=a^2+b^2+4u^2,$$

因而其第一基本形式

$$I=(a^2+b^2+4v^2)du^2+2(a^2-b^2+4uv)dudv+(a^2+b^2+4u^2)dv^2.$$

□

2. 求正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,bv\}$ 的第一基本形式, 并证明坐标曲线互相垂直.

解： 由参数方程计算得

$$\boldsymbol{r}_u=\{\cos v,\sin v,0\},\quad \boldsymbol{r}_v=\{-u\sin v,u\cos v,b\},$$

$$E=\boldsymbol{r}_u^2=1,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0,\quad G=\boldsymbol{r}_u^2=u^2+b^2,$$

所以, 正螺面的第一基本形式为 $I=du^2+(u^2+b^2)dv^2$. 进而由 $F=0$ 知正螺面的坐标曲线互相垂直. □

3. 在第一基本形式为 $I=ds^2=du^2+\sinh^2 u\,dv^2$ 的曲面上, 求方程为 $u=v$ 的曲线的弧长.

解： 由 $u=v$ 得 $du=dv$, 因此

$$s=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{du^2+\sinh^2 udv^2}=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1+\sinh^2 u}du$$
$$=\int_{u_1}^{u_2}\cosh udu=\sinh u_2-\sinh u_1.$$

□

4. 设一个曲面的第一基本形式为 $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$. 求它上面两条曲线 $u + v = 0$, $u - v = 0$ 的交角(注意：解此题时, 不需要知道曲面的方程和曲面的形状).

解：关于曲线 $u + v = 0$, 令 $u = u_1$, $v = v_1$, 则 $du_1 = -dv_1$; 关于曲线 $u - v = 0$, 令 $u = u_2$, $v = v_2$, 则 $du_2 = dv_2$. 设此二曲线交角为 θ, 则

$$\cos\theta = \pm\frac{Edu_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + Gdv_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^2 + Fdu_1dv_1 + Gdv_1^2}\sqrt{Edu_2^2 + Fdu_2dv_2 + Gdv_2^2}}.$$

由 $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ 可知

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + a^2.$$

于是

$$\cos\theta = \pm\frac{u^2 + a^2 - 1}{u^2 + a^2 + 1}.$$

把曲线 $u + v = 0$ 与 $u - v = 0$ 交点的曲线坐标 $u = 0$, $v = 0$ 代入上式得二曲线的交角余弦为

$$\cos\theta = \pm \left.\frac{u^2 + a^2 - 1}{u^2 + a^2 + 1}\right|_{u=0,v=0} = \pm\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}.$$

□

5. 求曲面 $z = axy$ 上坐标曲线 $x = x_0$ 和 $y = y_0$ 的的交角.

解：首先容易求得曲面的第一基本形式为

$$I = (1 + a^2y^2)dx^2 + 2a^2xydxdy + (1 + a^2x^2)dy^2.$$

因此坐标曲线 $x = x_0$ 和 $y = y_0$ 交角的余弦为

$$\cos\theta = \pm \left.\frac{F}{\sqrt{EG}}\right|_{x=x_0,y=y_0} = \pm\frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1 + a^2y_0^2}\sqrt{1 + a^2x_0^2}}.$$

□

6. 求 $u-$ 曲线和 $v-$ 曲线正交轨线的微分方程.

解：对 u-曲线有 $du : dv = 1 : 0$, 设它的正交轨线的方向为 $\delta u : \delta v$, 则由两个方向正交的充要条件

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0,$$

得 $u-$ 线的正交轨线微分方程为 $E\delta u + F\delta v = 0$. 同样, $v-$ 曲线的正交轨线微分方程为 $F\delta u + G\delta v = 0$. □

7. 在曲面上一点, 含 du, dv 的二次方程 $Pdu^2 + 2Qdudv + Rdv^2 = 0$ 确定两个切方向 $(du : dv)$ 和 $(\delta u : \delta v)$, 证明这两个方向互相垂直的充要条件是

$$ER - 2FQ + GP = 0.$$

证明： 两个方向 $du : dv$ 和 $\delta u : \delta v$ 正交的充要条件是

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0,$$

换一种写法即

$$E\left(\frac{du}{dv}\frac{\delta u}{\delta v}\right) + F\left(\frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v}\right) + G = 0.$$

将已知的二次方程写成

$$P\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2Q\left(\frac{du}{dv}\right) + R = 0,$$

则它的两个根, 记为 $\frac{du}{dv}$, $\frac{\delta u}{\delta v}$, 均应满足上述方程, 由根与系数的关系知,

$$\frac{du}{dv}\frac{\delta u}{\delta v} = \frac{R}{P}, \quad \frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v} = -\frac{2Q}{P}.$$

因此, 这两个方向垂直的充要条件为

$$E\left(\frac{R}{P}\right) + F\left(-\frac{2Q}{P}\right) + G = 0,$$

即

$$ER - 2FQ + GP = 0.$$

□

8. 证明曲面的坐标曲线的二等分角轨线的微分方程为 $Edu^2 = Gdv^2$.

证明： 记曲面的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, 则 $u-$ 线的切向为 $(1 : 0)$, $v-$ 线的切向为 $(0 : 1)$.

设坐标曲线的二等分角轨线的方向为 $(du:dv)$, 它与 $u-$ 线的夹角为 θ_1, 与 $v-$ 线的夹角为 θ_2, 则

$$\cos\theta_1 = \pm\frac{Edu+Fdv}{\sqrt{I}\sqrt{E}},$$
$$\cos\theta_2 = \pm\frac{Fdu+Gdv}{\sqrt{I}\sqrt{G}}.$$

而轨线满足

$$\cos\theta_1 = \pm\cos\theta_2,$$

即有

$$\frac{Edu+Fdv}{\sqrt{I}\sqrt{E}} = \pm\frac{Fdu+Gdv}{\sqrt{I}\sqrt{G}}.$$

整理得

$$E(EG-F^2)du^2 = G(EG-F^2)dv^2,$$

注意到 $EG-F^2\neq 0$, 故有 $Edu^2 = Gdv^2$. □

9. 设曲面的第一基本形式为 $ds^2 = du^2 + (u^2+a^2)dv^2$, 求出曲面上由三条曲线 $u=\pm av,\ v=1$ 相交所成的三角形的面积.

解: 曲面上三条曲线 $u=\pm av,\ v=1$ 相交于下列三点: $A(u=0,v=0), B(u=a,v=1), C(u=-a,v=1)$. 于是曲边三角形 ABC 的面积是

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,dudv \\
&= \iint_D \sqrt{u^2+a^2}\,dudv \\
&= 2\int_0^a \sqrt{u^2+a^2}\,du\int_{\frac{u}{a}}^1 dv \\
&= 2\int_0^a (1-\frac{u}{a})\sqrt{u^2+a^2}\,du \\
&= \left[u\sqrt{u^2+a^2} + a^2\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) - \frac{2}{3a}(u^2+a^2)^{3/2}\right]_0^a \\
&= \left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln(\sqrt{2}+1)\right]a^2.
\end{aligned}$$

□

10. 求球面$\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)=\{a\cos\varphi\cos\theta, a\cos\varphi\sin\theta, a\sin\varphi\}$的面积.

解：容易求得球面的第一基本形式为

$$I=ds^2=a^2(d\varphi^2+\cos^2\varphi d\theta^2),$$

因此, 球面的面积为

$$\begin{aligned}S&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{EG-F^2}d\theta d\varphi\\&=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\right)d\theta\\&=4\pi a^2.\end{aligned}$$

□

11. 证明螺面$x=u\cos v, y=u\sin v, z=u+v$与旋转曲面$x=t\cos\theta, y=t\sin\theta, z=\sqrt{t^2-1}$的等距对应为

$$\begin{cases}\theta=\arctan u+v\\ t=\sqrt{u^2+1}.\end{cases}$$

证明：经过计算可以得到螺面的第一基本形式为

$$I_1=2du^2+2dudv+(1+u^2)dv^2,$$

旋转面的第一基本形式为

$$I_2=\frac{2t^2-1}{t^2-1}dt^2+t^2d\theta^2.$$

我们只要证明, 对应

$$\begin{cases}\theta=\arctan u+v,\\ t=\sqrt{u^2+1},\end{cases}$$

能使$I_1=I_2$, 从而两曲面等距.

首先, 由$t=\sqrt{u^2+1}$得,

$$t^2=u^2+1,\quad \frac{2t^2-1}{t^2-1}=\frac{2u^2+1}{u^2},$$

其次

$$\frac{\partial\theta}{\partial u}=\frac{1}{1+u^2},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial v}=1,$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}=\frac{u}{\sqrt{u^2+1}},\qquad \frac{\partial t}{\partial v}=0.$$

所以

$$dt^2=\left(\frac{\partial t}{\partial u}du+\frac{\partial t}{\partial v}dv\right)^2=\frac{u^2}{u^2+1}du^2,$$
$$d\theta^2=\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}du+\frac{\partial\theta}{\partial v}dv\right)^2=\frac{1}{(1+u^2)^2}du^2+\frac{2}{1+u^2}dudv+dv^2.$$

于是, 将上式代入第一基本形式 I_2 中直接计算可以得到

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{2t^2-1}{t^2-1}dt^2+t^2d\theta^2\\&=2du^2+2dudv+(1+u^2)dv^2\\&=I_1.\end{aligned}$$

$\square$