《微分几何》第 67 页习题解答

1. 求正螺面 $\boldsymbol{r}(u,v)=\{u\cos v,u\sin v,bv\}$ 的坐标曲线.

解：根据坐标曲线的定义, 令 $v=v_0$, 得到曲面上的一条 $u-$ 曲线, 它的参数方程是

$$\boldsymbol{r}(u,v_0)=\{u\cos v_0,u\sin v_0,bv_0\},$$

同样, 令 $u=u_0$, 得到一条 $v-$ 曲线, 它的参数方程是

$$\boldsymbol{r}(u_0,v)=\{u_0\cos v,u_0\sin v,bv\}.$$

□

2. 证明双曲抛物面 $\boldsymbol{r}(u,v)=\{a(u+v),b(u-v),2uv\}$ 的坐标曲线即它的直母线.

证明：令 $v=v_0$, 得到双曲抛物面的一条 $u-$ 曲线为

$$\boldsymbol{r}(u,v_0)=\{a(u+v_0),b(u-v_0),2uv_0\},$$

其切向量 $\boldsymbol{r}'(u,v_0)=\{a,b,2v_0\}$ 为常向量, 故 u-曲线为直线.

同理, $v-$ 曲线也是直线, 即双曲抛物面的两族坐标曲线都是直线. 由解析几何知识知, 双曲抛物面上只有两族直母线, 故双曲抛物面的坐标曲线为直母线. □

3. 求球面 $\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)=\{a\cos\theta\cos\varphi,a\cos\theta\sin\varphi,a\sin\theta\}$ 上任意点的切平面和法线.

解：设 $\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$ 表示切平面上任意点的向径, 则任意点处切平面的方程为

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(\theta,\varphi),\boldsymbol{r}_\theta(\theta,\varphi),\boldsymbol{r}_\varphi(\theta,\varphi))=0,$$

即

$$\begin{vmatrix} X-a\cos\theta\cos\varphi & Y-a\cos\theta\sin\varphi & Z-a\sin\theta \\ -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & -a\cos\theta \\ -a\cos\theta\sin\varphi & -a\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}=0.$$

化简整理后, 写成一般形式即为

$$\cos\theta\cos\varphi X+\cos\theta\sin\varphi Y+\sin\theta Z-a=0.$$

再来求任意点的法线方程, 用 $\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$ 表示球面上任意点 $M(x,y,z)$ 处法线上流动点的向径, 则法线的矢量式参数方程为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda(\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi),$$

其中 λ 是决定点 $\boldsymbol{R}$ 在法线上的位置参数. 代入数据即得法线的对称式参数方程为

$$\frac{X-a\cos\theta\cos\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}=\frac{Y-a\cos\theta\sin\varphi}{\cos\theta\sin\varphi}=\frac{Z-a\sin\theta}{\sin\theta}.$$

由于球面曲线的法线一定过球心, 而题设球面的球心为坐标原点, 故球面上任意点的法线方程可简化为

$$\frac{X}{\cos\theta\cos\varphi}=\frac{Y}{\cos\theta\sin\varphi}=\frac{Z}{\sin\theta}.$$

□

4. 求椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在任意点的切平面方程, 并证明沿每条直母线此曲面只有一个切平面.

解法 I (解析几何方法): 根据解析几何中关于二次曲面的理论, 若将椭圆柱面的方程写成(隐式方程)

$$F(x,y,z)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

则其法向量为 $\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\}$, 即 $\{\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},0\}$, 故椭圆柱面在其任意点 (x,y,z) 处的切平面方程为

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+0(Z-z)=0,$$

即

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1.$$

解法 II (微分几何方法): 将椭圆柱面的方程写成参数方程

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\{a\cos u,b\sin u,v\},$$

其中$0 < u < 2\pi, -\infty < v < +\infty$是参数, a, b是正常数. 于是, 法向量

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \{b\cos u, a\sin u, 0\},$$

相应的切平面方程为

$$b\cos u(X - a\cos u) + a\sin u(Y - b\sin u) = 0,$$

即

$$b\cos uX + a\sin uY - ab = 0,$$

或

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1.$$

易知, 椭圆柱面的直母线是其在上述参数表示下的$v-$曲线, 而沿$v-$曲线, 椭圆柱面的法向量$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$与$v$的无关性则说明沿每条直母线, 它只有一个切平面. $\square$

5. 证明曲面$\boldsymbol{r} = \{u, v, \frac{a^3}{uv}\}$的切平面和三个坐标面所构成的四面体的体积是常数.

证明: 因为

$$\boldsymbol{r}_u = \{1, 0, -\frac{a^3}{u^2v}\}, \qquad \boldsymbol{r}_v = \{0, 1, -\frac{a^3}{uv^2}\},$$

所以, 过这曲面上任一点的切平面的法向量

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \{\frac{a^3}{u^2v}, \frac{a^3}{uv^2}, 1\},$$

相应的切平面方程是

$$\frac{a^3}{u^2v}(x-u) + \frac{a^3}{uv^2}(y-v) + (z - \frac{a^3}{uv}) = 0,$$

将其改写成截距式即为

$$\frac{x}{3u} + \frac{y}{3v} + \frac{z}{\frac{3a^3}{uv}} = 1,$$

于是, 该切平面和三个坐标平面所构成的四面体的体积自然是

$$V = \frac{1}{6}\cdot|3u|\cdot|3v|\cdot\frac{3|a|^3}{|uv|} = \frac{9}{2}|a|^3.$$

$\square$