# 《微分几何》第 53 页习题解答

1. 求圆柱螺线$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$在任意点的密切平面方程.

**解** 记圆柱螺线的参数方程为$\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$, 则

$$\boldsymbol{r}'(t)=\{-a\sin t, a\cos t, b\},\quad \boldsymbol{r}''(t)=\{-a\cos t, -a\sin t, 0\},$$

所以$\boldsymbol{r}(t)$在任意点处的密切平面方程为

$$\begin{vmatrix} X-a\cos t & Y-a\sin t & Z-bt \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=0,$$

展开整理得到

$$(b\sin t)X-(b\cos t)Y+aZ-abt=0.$$

□

2. 求曲线$x=t\sin t, y=t\cos t, z=te^t$在原点的密切平面, 法平面, 从切平面, 切线, 主法线, 副法线方程.

**解** 由所给曲线的参数方程$\boldsymbol{r}(t)=\{t\sin t, t\cos t, te^t\}$, 先计算出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'(t)&=\{\sin t+t\cos t, \cos t-t\sin t, e^t+te^t\},\\ \boldsymbol{r}''(t)&=\{2\cos t-t\sin t, -2\sin t-t\cos t, 2e^t+te^t\}.\end{aligned}$$

由已知曲线方程知原点对应于参数$t=0$的点. 所以

$$\boldsymbol{r}(0)=\{0,0,0\},\quad \boldsymbol{r}'(0)=\{0,1,1\},\quad \boldsymbol{r}''(0)=\{2,0,2\}.$$

而且, 曲线$\boldsymbol{r}(t)$在原点的三个基本向量为

$$\begin{aligned}\alpha(0)&=\frac{\boldsymbol{r}'(0)}{|\boldsymbol{r}'(0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,1,1\},\\ \gamma(0)&=\frac{\boldsymbol{r}'(0)\times\boldsymbol{r}''(0)}{|\boldsymbol{r}'(0)\times\boldsymbol{r}''(0)|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,-1\},\\ \beta(0)&=\gamma(0)\times\alpha(0)=\frac{1}{\sqrt{6}}\{2,-1,1\}.\end{aligned}$$

于是, 曲线在原点处的基本三棱形为

切线 $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$, 主法线$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$, 副法线$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$,

法平面$y+z=0$, 密切平面$x+y-z=0$, 从切平面$2x-y+z=0$. □

3. 证明圆柱螺线$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$的主法线和$z$轴垂直相交.

**证法 I** 由于$\boldsymbol{r}'(t)=\{-a\sin t, a\cos t, b\}$, 因此$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$, 将$\boldsymbol{r}'(t)$单位化后得到

$$\alpha=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{-a\sin t, a\cos t, b\},$$

进而

$$\beta=\frac{\frac{d\alpha}{ds}}{|\frac{d\alpha}{ds}|}=\frac{\frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}}{|\frac{d\alpha}{dt}||\frac{dt}{ds}|}=\frac{\frac{d\alpha}{dt}}{|\frac{d\alpha}{dt}|}=\{\cos t, \sin t, 0\}.$$

从而知圆柱螺线在任一点处的主法线方程为

$$\frac{x-a\cos t}{\cos t}=\frac{y-a\sin t}{\sin t}=\frac{z-bt}{0},$$

取$z$轴上的单位矢量$\boldsymbol{e}_3=\{0,0,1\}$, 显然有$\boldsymbol{e}_3\cdot\beta=0$, 即$\boldsymbol{e}_3\perp\beta$, 说明圆柱螺线的主法线总与$z$轴垂直. 同时, 注意到对任何实数$t$, 点$(0,0,bt)$既在$z$轴上, 也在圆柱螺线的主法线上, 即圆柱螺线的主法线总与$z$轴相交. 因此, 我们证明了圆柱螺线的主法线总与$z$轴垂直相交.

**证法 II** 证明主法线与$z$轴相交的**投影法**: 将圆柱螺线的主法线投影到$xoy$平面上得到

$$\begin{cases}\sin t(x-a\cos t)-\cos t(y-a\sin t)=0,\\ z=0.\end{cases}$$

显然投影曲线过原点, 从而在三维空间中, 主法线与$z$轴相交. □

4. 在曲线$x=\cos\alpha\cos t, y=\cos\alpha\sin t, z=t\sin\alpha$的副法线的正向取单位长, 求其端点组成的新曲线的密切平面.

**解** 令$\boldsymbol{r}(t)=\{\cos\alpha\cos t, \cos\alpha\sin t, t\sin\alpha\}$, 则由$\boldsymbol{r}(t)$的副法线正向的单位向量的端点组成的新曲线的参数方程$\bar{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{r}(t)+\gamma(t)$. 据此, 我

们先求曲线$\boldsymbol{r}(t)$的副法向量$\gamma$, 由$\boldsymbol{r}'(t) = \{-\cos\alpha\sin t, \cos\alpha\cos t, \sin\alpha\}$知, $|\boldsymbol{r}'(t)| = 1$, 所以$t$是自然参数, 故

$$\begin{aligned}
\alpha &= \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \{-\cos\alpha\sin t, \cos\alpha\cos t, \sin\alpha\},\\
\beta &= \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|} = \{-\cos t, -\sin t, 0\},\\
\gamma &= \alpha\times\beta = \{\sin\alpha\sin t, -\sin\alpha\cos t, \cos\alpha\},
\end{aligned}$$

于是新曲线的参数方程为

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = \{\cos(t-\alpha), \sin(t-\alpha), t\sin\alpha + \cos\alpha\},$$

那末新曲线在参数为$t$的点处的密切平面方程为

$$\begin{vmatrix}
X-\cos(t-\alpha) & Y-\sin(t-\alpha) & Z-t\sin\alpha-\cos\alpha\\
-\sin(t-\alpha) & \cos(t-\alpha) & \sin\alpha\\
-\cos(t-\alpha) & -\sin(t-\alpha) & 0
\end{vmatrix} = 0,$$

展开后化简, 可得到所求密切平面方程为

$$[X\sin(t-\alpha) - Y\cos(t-\alpha)]\sin\alpha + Z = t\sin\alpha + \cos\alpha.$$

□

5. 证明球面曲线的法平面通过球的中心.

**证明** 不失一般性, 取球的中心为右手么正坐标系的坐标原点$O$, 并设球面曲线(即此曲线落在一个球面上)的自然参数方程为$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, 则$|\boldsymbol{r}(s)| =$ 常数(即球的半径), 即$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} =$ 常数, 两边关于弧长$s$求导, 得

$$\boldsymbol{r}\cdot\alpha = 0. \tag{5.1}$$

设$\rho(x,y,z)$是$\boldsymbol{r}(s)$法平面上任一点的向径, 则曲线的法平面方程为

$$(\rho - \boldsymbol{r}(s))\cdot\alpha = 0,$$

由(5.1)显然球心满足法平面方程, 因此法平面通过球的中心. □

**注记**: 命题5的逆命题亦成立, 即若曲线的所有法平面通过定点, 则曲线为球面曲线. 于是我们有: **曲线为球面曲线的充要条件是它的所有法平面都通过定点.**

6. 证明过原点平行于圆柱螺线$\boldsymbol{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\}$的副法线的直线轨迹是锥面$a^2(x^2+y^2) = b^2z^2$.

**证明** 直接计算得到

$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = \{ab\sin t, -ab\cos t, a^2\},$$

由解析几何知, 过原点且平行于$\boldsymbol{r}(t)$的副法线的单参数直线簇为

$$\begin{cases} x = ub\sin t, \\ y = -ub\cos t, \\ z = ua, \end{cases}$$

其中$u$为参数, 消去$t$得到

$$\begin{cases} x^2+y^2 = b^2u^2, \\ z^2 = a^2u^2, \end{cases}$$

消去$u$得

$$a^2(x^2+y^2) = b^2z^2.$$

□

也可以从过原点, 平行于圆柱螺线的副法线的直线方程中直接消去参数而得所求的轨迹方程.

7. 求以下曲线的曲率和挠率.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = \{a\cosh t, a\sinh t, at\}$, $(a>0)$;

(2) $\boldsymbol{r}(t) = \{a(3t-t^3), 3at^2, a(3t+t^3)\}$, $(a>0)$.

**解** (1) 由参数方程得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \{a\sinh t, a\cosh t, a\}, \\ \boldsymbol{r}'' &= \{a\cosh t, a\sinh t, 0\}, \\ \boldsymbol{r}''' &= \{a\sinh t, a\cosh t, 0\}, \end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' &= \{-a^2 \sinh t, a^2 \cosh t, -a^2\}, \\
|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| &= \sqrt{2}a^2 \cosh t, \\
(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') &= a^3, \\
|\boldsymbol{r}'| &= \sqrt{2}\, a \cosh t.
\end{aligned}
$$

于是, 双曲螺线的曲率 $k$ 和挠率 $\tau$ 分别为

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{\sqrt{2}\, a^2 \cosh t}{2\sqrt{2}a^3 \cosh^3 t} = \frac{1}{2a \cosh^2 t}, \\
\tau &= \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2} = \frac{a^3}{2a^4 \cosh^2 t} = \frac{1}{2a \cosh^2 t}.
\end{aligned}
$$

(2) 由参数方程得到

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}' &= \left\{a(3-3t^2), 6at, a(3+3t^2)\right\}, \\
\boldsymbol{r}'' &= \{-6at, 6a, 6at\}, \\
\boldsymbol{r}''' &= \{-6a, 0, 6a\}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = 18a^2 \left\{t^2-1, -2t, t^2+1\right\}, \\
&|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| = 18\sqrt{2}a^2(t^2+1), \\
&(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = 216a^3, \\
&|\boldsymbol{r}'| = 3\sqrt{2}a(t^2+1).
\end{aligned}
$$

于是, 曲线的曲率 $k$ 和挠率 $\tau$ 分别为

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{1}{3a(t^2+1)^2}, \\
\tau &= \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2} = \frac{1}{3a(t^2+1)^2}.
\end{aligned}
$$

□

8. 曲线 $\boldsymbol{r}(t) = \{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$, 求:

1) 基本向量 $\alpha, \beta, \gamma$;

2) 曲率和挠率;

3) 验证 Frenet 公式.

**解** 首先由曲线的参数方程求出

$$\boldsymbol{r}'(t)=\frac{1}{2}\sin 2t\{-3\cos t,3\sin t,-4\},$$
$$\boldsymbol{r}''(t)=\{6\cos t\sin^2 t-\cos^3 t,6\sin t\cos^2 t-3\sin^3 t,-4\cos 2t\}.$$

因为曲线的弧长$s=\int_0^t|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt=\int_0^t\frac{5}{2}\sin 2tdt$, 所以

$$\frac{ds}{dt}=\frac{5}{2}\sin 2t,\qquad \frac{dt}{ds}=\frac{2}{5\sin 2t}.$$

所以

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{5}\{-3\cos t,3\sin t,-4\}$$

由于

$$\boldsymbol{r}''(t)=(\dot{\boldsymbol{r}})'\frac{ds}{dt}+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d\dot{\boldsymbol{r}}}{ds}(\frac{ds}{dt})^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{d^2s}{dt^2}=\ddot{\boldsymbol{r}}(\frac{ds}{dt})^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{d^2s}{dt^2},$$

所以

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{r''-\dot{\boldsymbol{r}}\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}=\frac{2}{25\sin 2t}\{3\sin t,3\cos t,0\}.$$

1) 求基本向量$\alpha,\beta,\gamma$. 由定义

$$\alpha=\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{5}\{-3\cos t,3\sin t,-4\},$$
$$\beta=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|}=\{\sin t,\cos t,0\},$$
$$\gamma=\alpha\times\beta=\frac{1}{5}\{4\cos t,-4\sin t,-3\}.$$

2) 计算曲率$k$和挠率$\tau$ 由曲率的定义, 得

$$k(s)=|\ddot{\boldsymbol{r}}|=\frac{6}{25\,|\sin 2t\,|},$$

为了计算挠率, 我们先计算$\dot{\alpha},\dot{\beta},\dot{\gamma}$,

$$\dot{\alpha}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{6}{25\sin 2t}\{\sin t,\cos t,0\},$$
$$\dot{\beta}=\frac{d\beta}{ds}=\frac{d\beta}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{2}{25\sin 2t}\{\cos t,\sin t,0\},$$
$$\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{ds}=\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{8}{25\sin 2t}\{-\sin t,-\cos t,0\}.$$

由挠率的定义, 注意到$\dot{\gamma}$与$\beta$是同向还是异向取决于$\sin 2t$的正负, 若$\sin 2t$为正, 则$\dot{\gamma}$与$\beta$异向; 若$\sin 2t$为负, 则$\dot{\gamma}$与$\beta$同向. 无论何种情况都有

$$\tau(s) = \frac{8}{25\sin 2t}.$$

3) 验证Frenet公式

由上述算式, 显然有$\dot{\alpha} = k(t)\beta, \quad \dot{\gamma} = -\tau(t)\beta$, 最后, 容易计算

$$-k(t)\alpha + \tau(t)\gamma = \frac{2}{5\sin 2t}\{\cos t, -\sin t, 0\} = \dot{\beta}.$$

□

9. 证明: 如果曲线的所有切线都经过一定点, 则此曲线为直线.

**证法 I** 设曲线的一般参数方程为$r = r(t)$, $\rho$是切线上任一点的向径, 则任意一点处的切线方程为

$$\rho - r(t) = \lambda(t) r'(t), \quad (\lambda(t) \neq 0).$$

若设切线都过定点$r_0$, 则

$$r_0 - r(t) = \lambda(t) r'(t),$$

两边关于$t$求导, 得

$$0 = (1 + \lambda'(t)) r'(t) + \lambda(t) r''(t),$$

由于$\lambda(t)$不为零, 故上式表明$r'(t)$与$r''(t)$线性相关, 从而$r'(t) \times r''(t) = 0$, 于是曲线的曲率$k(t) \equiv 0$, 即该曲线为直线.

**证法 II** 设曲线的自然参数方程为$r = r(s)$, 并设切线上流动点的径矢为$\rho$, 则切线方程为

$$\rho - r(s) = \lambda(s)\alpha, \quad (\lambda(s) \neq 0)$$

由题设切线过定点, 设定点为$r_0$, 则

$$r_0 - r(s) = \lambda(s)\alpha,$$

两边关于 $s$ 求导, 得

$$0 = (1 + \lambda'(s))\alpha + \lambda(s)k(s)\beta,$$

而 $\alpha \perp \beta$, 故 $1 + \lambda'(s) = 0$, 且 $\lambda(s)k(s) = 0$, 若曲线上某点处 $k(s) \neq 0$, 由后式必须 $\lambda(s) = 0$, 这与前式矛盾. 于是 $k(s) \equiv 0$, 即该曲线为直线. □

10. 证明: 如果曲率处处不为零的曲线的所有密切平面都经过一定点, 则此曲线为平面曲线.

**证明 I** 设曲线的一般参数方程为 $r = r(t)$, 并设密切平面上流动点的径矢为 $R$, 则密切平面方程为

$$(R - r(t), r'(t), r''(t)) = 0.$$

利用密切平面过定点的条件, 不失一般性设定点为坐标原点, 则

$$(r(t), r'(t), r''(t)) = 0, \tag{1}$$

上式两边关于参数 $t$ 求导, 得

$$(r(t), r'(t), r'''(t)) = 0, \tag{2}$$

由(1), (2)知 $r'(t), r''(t), r'''(t)$ 共面, 即有

$$(r'(t), r''(t), r'''(t)) = 0.$$

于是, 挠率 $\tau(t) \equiv 0$, 即曲线为平面曲线.

**证法 II** 设曲线的自然参数方程为 $r = r(s)$, 并设密切平面上流动点的径矢为 $R$, 则密切平面方程为

$$(R - r(s)) \cdot \gamma = 0.$$

由题设密切平面过定点, 不失一般性设定点为坐标原点, 则

$$r(s) \cdot \gamma = 0, \tag{3}$$

两边关于弧长 $s$ 求导, 得

$$\tau(s) r(s) \cdot \beta = 0. \tag{4}$$

反设曲线在某点处 $\tau(s)\neq 0$, 则由(4)式 $r(s)\perp\beta$, 而由(3) $r(s)\perp\gamma$, 所以 $r(s)\parallel\beta\times\gamma$, 即 $r(s)\parallel\alpha$, 这时 $r(s)\times\alpha=0$, 两边对 $s$ 求导, 得 $k(s)r(s)\times\beta=0$, 而 $k(s)$ 处处不为零, 于是 $r(s)\times\beta=0$, 这与 $r(s)\times\alpha=0$ 矛盾.

上述矛盾说明曲线的挠率 $\tau(s)\equiv 0$, 即曲线为平面曲线. □

11. 证明: 若曲线的所有法平面包含非零常向量 $e$, 则曲线是直线或平面曲线.

**证明 I** 设曲线的自然参数方程为 $r=r(s)$, 由题设

$$e\cdot\alpha=0,$$

若 $\alpha$ 是常向量, 则曲线的曲率 $k\equiv 0$, 即曲线为直线. 否则, 由于

$$\frac{d}{ds}(r(s)\cdot e)=\alpha\cdot e=0,$$

即 $r(s)\cdot e=p_0$ (常数), 换句话说, 曲线为平面曲线.

**证明 II** 对一般参数方程 $r=r(t)$, 由题设

$$r'(t)\cdot e=0.$$

两边关于 $t$ 连续求导得到

$$r''(t)\cdot e=0,\quad r'''(t)\cdot e=0,$$

以上三式说明 $r'(t),r''(t),r'''(t)$ 共面, 从而 $\tau(t)\equiv 0$, 曲线为平面曲线. 特别地, 如果 $r'(t)\parallel r''(t)$, 则 $k(t)\equiv 0$, 此时曲线为直线.

**证明III** 由题设 $(e,\beta,\gamma)=0$, 关于弧长求导, 并利用 Frenet 公式得

$$k(s)(e,\alpha,\gamma)=0.$$

若 $(e,\alpha,\gamma)$ 不共面, 则 $k\equiv 0$, 曲线为直线. 否则, $e\parallel\gamma$, 即曲线的副法向量 $\gamma$ 为常向量, 此时曲线为平面曲线. □

12. 证明: 常曲率空间曲线曲率中心的轨迹仍是曲率等于常数的曲线.

**证明 I** 设空间曲线的自然参数方程为 $r=r(s)$, 其曲率 $k$ 为常数, 挠率为 $\tau$, 根据曲率中心的定义, $r=r(s)$ 的曲率中心的轨迹为

$$r^*(s)=r(s)+\frac{\beta(s)}{k}\quad (\text{注意:}\, s\,\text{并非弧长参数}).$$

方程两边关于 $s$ 求导, 得

$$\frac{dr^*}{ds}=\alpha+\frac{1}{k}(-k\alpha+\tau\gamma)=\frac{\tau}{k}\gamma,$$

再次对 $s$ 求导, 有

$$\frac{d^2r^*}{ds^2}=\frac{\tau'}{k}\gamma-\frac{\tau^2}{k}\beta,$$

于是

$$\frac{dr^*}{ds}\times\frac{d^2r^*}{ds^2}=\left(\frac{\tau}{k}\gamma\right)\times\left(\frac{\tau\prime}{k}\gamma-\frac{\tau^2}{k}\beta\right)=-\frac{\tau^3}{k^2}(\gamma\times\beta)=\frac{\tau^3}{k^2}\alpha.$$

最后, $r^*(s)$ 的曲率为

$$k^*=\frac{|\frac{dr^*}{ds}\times\frac{d^2r^*}{ds^2}|}{|\frac{dr^*}{ds}|^3}=\frac{\frac{|\tau^3|}{k^2}}{\frac{|\tau^3|}{k^3}}=k\quad(\text{常数}).$$

**证明 II** 设曲线 $C:r=r(s)$ 是常曲率为 $k(\neq 0)$ 的正则曲线, 其曲率中心的轨迹方程为

$$\bar{C}:\ \bar{r}(s)=r(s)+\frac{1}{k}\beta(s).\tag{12.1}$$

注意 $s$ 并非 $\bar{C}$ 的弧长参数. 设 $\bar{C}$ 的弧长参数为 $\bar{s}$, 曲率为 $\bar{k}$. (12.1) 式两边对 $\bar{s}$ 求导并利用 Frenet 公式得

$$\bar{\alpha}=\frac{\tau}{k}\frac{ds}{d\bar{s}}\gamma,$$

即

$$\bar{\alpha}=\pm\gamma,\tag{12.2}$$

且

$$\frac{ds}{d\bar{s}}=\pm\frac{k}{\tau}.\tag{12.3}$$

(12.2) 式两边再对 $\bar{s}$ 求导, 并将 (12.3) 式代入得

$$\bar{k}\bar{\beta}=\pm k\beta,$$

两边取模长得到 $\bar{k}=k$. □

13. 证明曲线 $x=1+3t+2t^2, y=2-2t+5t^2, z=1-t^2$ 为平面曲线, 并求出它所在的平面方程.

**证明** 令 $r(t)=\{1+3t+2t^2, 2-2t+5t^2, 1-t^2\}$, 则

$$\begin{aligned}r'(t)&=\{3+4t,-2+10t,-2t\},\\ r''(t)&=\{4,10,-2\},\\ r'''(t)&=\{0,0,0\}.\end{aligned}$$

于是, 曲线 $r(t)$ 的挠率 $\tau(t)$ 为

$$\tau(t)=\frac{(r',r'',r''')}{(r'\times r'')^2}\equiv 0.$$

即曲线为平面曲线.

以下我们用两种方法求该曲线所在的平面方程.

**方法 I** 因为曲线为平面曲线, 所以该曲线所在平面正好是它的密切平面, 在曲线上取一点 $(0,9,0)$, (对应的参数 $t=-1$), 则密切平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y-9 & z\\ 3+4t & -2+10t & -2t\\ 4 & 10 & -2\end{vmatrix}=0, \quad 即 \quad 2x+3y+19z-27=0.$$

**方法 II** 选曲线上三点 $P_1(6,5,0), P_2(0,9,0), P_3(1,2,1)$, 由 $P_1, P_2, P_3$ 三点确定的平面正好是曲线所在的平面, 其方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1\\ -1 & 7 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}=0, \quad 即 \quad 2x+3y+19z-27=0.$$

□

14. 设在两条曲线 $\Gamma, \overline{\Gamma}$ 的点之间建立了一一对应关系, 使他们在对应点的切线平行, 证明他们在对应点的主法线及副法线也分别平行.

**证明** 设两条对应曲线 $\Gamma$ 和 $\overline{\Gamma}$ 的自然参数方程分别是 $r=r(s)$ 和 $\overline{r}=\overline{r}(\overline{s})$, 其中 $s$ 和 $\overline{s}$ 分别是对应曲线的自然参数, 记 $\Gamma$ 和 $\overline{\Gamma}$ 在对应点的基本向量分别为 $\alpha,\beta,\gamma$ 和 $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$, 曲率分别为 $k$ 和 $\overline{k}$, 根据题设知

$$\alpha \parallel \overline{\alpha},$$

即
$$\alpha = \pm\overline{\alpha},$$
上式两边同时关于参数 $s$ 求导, 得
$$\frac{d\alpha}{ds} = \pm\frac{d\overline{\alpha}}{ds} = \pm\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{s}}\cdot\frac{d\overline{s}}{ds}.$$
利用 Frenet 公式, 上式即
$$k\beta = \pm\frac{d\overline{s}}{ds}\overline{k}\cdot\overline{\beta}$$
于是 $\beta \parallel \overline{\beta}$, 最后由于 $\gamma = \alpha\times\beta, \overline{\gamma} = \overline{\alpha}\times\overline{\beta}$, 所以 $\gamma \parallel \overline{\gamma}$. □

15. 设在两条曲线 $\Gamma, \overline{\Gamma}$ 的点之间建立了一一对应关系, 使它们在对应点的主法线总是互相平行, 证明它们在对应点的切线作成固定角.

**证明** 设两条对应曲线 $\Gamma$ 和 $\overline{\Gamma}$ 的自然参数方程分别是 $r = r(s)$ 和 $\overline{r} = \overline{r}(\overline{s})$, 其中 $s$ 和 $\overline{s}$ 分别是对应曲线的自然参数, 记 $\Gamma$ 和 $\overline{\Gamma}$ 在对应点处的基本向量分别是 $\alpha, \beta, \gamma$ 和 $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$, 曲率分别为 $k$ 和 $\overline{k}$, 挠率分别为 $\tau$ 和 $\overline{\tau}$. 由题设知
$$\beta \parallel \overline{\beta}$$
即
$$\beta = \pm\overline{\beta} \tag{15.1}$$
设 $\Gamma$ 和 $\overline{\Gamma}$ 在对应点的切线间的夹角为 $\varphi$, 则
$$\cos\varphi = \frac{\alpha\cdot\overline{\alpha}}{|\,\alpha\,||\,\overline{\alpha}\,|} = \alpha\cdot\overline{\alpha}$$
下面我们来证明 $\alpha\cdot\overline{\alpha}$ 与参数 $s$ 和 $\overline{s}$ 都无关, 从而 $\varphi$ 是定角. 事实上
$$\begin{aligned}\frac{d(\alpha\cdot\overline{\alpha})}{ds} &= \frac{d\alpha}{ds}\cdot\overline{\alpha} + \alpha\cdot\frac{d\overline{\alpha}}{ds} \\ &= \dot{\to}\ \alpha\cdot\overline{\alpha} + \alpha\cdot\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{s}}\cdot\frac{d\overline{s}}{ds} \\ &= k\beta\cdot\overline{\alpha} + \frac{d\overline{s}}{ds}\overline{k}\alpha\cdot\overline{\beta}\end{aligned}$$
对 (15.1) 式两边与 $\overline{\alpha}$ 作内积, 得到 $\beta\cdot\overline{\alpha} = 0$, 与 $\alpha$ 作内积, 得到 $\alpha\cdot\overline{\beta} = 0$. 于是上式即为
$$\frac{d(\alpha\cdot\overline{\alpha})}{ds} = 0, \tag{15.2}$$

类似的推理, 我们可以得到

$$\frac{d(\alpha\cdot\overline{\alpha})}{d\overline{s}}=0, \tag{15.3}$$

(15.2), (15.3) 两式即说明, $\alpha\cdot\overline{\alpha}$ 是与参数 $s$ 和 $\overline{s}$ 无关的量. □

16. 若曲线 $\Gamma$ 的主法线是曲线 $\overline{\Gamma}$ 的副法线, $\Gamma$ 的曲率、挠率分别是 $k,\tau$, 求证: $k=\lambda_0(k^2+\tau^2)$, 其中 $\lambda_0$ 是常数.

**证明** 设曲线 $\Gamma$ 的自然参数方程为 $r=r(s)$ 曲线 $\overline{\Gamma}$ 的一般参数方程为 $\overline{r}=\overline{r}(s)$ (注意, $s$ 不是 $\overline{\Gamma}$ 的弧长). 由题目的假设条件知道

$$\overline{r}(s)=r(s)+\lambda(s)\beta(s) \tag{16.1}$$

将 (16.1) 式两边对 $s$ 求导,并利用 Frenet 公式得到

$$\frac{d\overline{r}}{ds}=(1-\lambda k)\alpha+\lambda'\beta+\lambda\tau\gamma \tag{16.2}$$

注意到 $\overline{r}$ 的切线方向 $\frac{d\overline{r}}{ds}\perp\overline{\gamma}$, 且 $\overline{\gamma}\parallel\beta$, 所以 $\frac{d\overline{r}}{ds}\perp\beta$. 这样

$$0=\beta\cdot\frac{d\overline{r}}{ds}=(1-\lambda k)\alpha\cdot\beta+\lambda'\beta\cdot\beta+\lambda\tau\gamma\cdot\beta=\lambda'$$

因此 $\lambda=$ 常数(记为 $\lambda_0$), 且

$$\frac{d\overline{r}}{ds}=(1-\lambda_0 k)\alpha+\lambda_0\tau\gamma$$

设 $\overline{s}$ 是 $\overline{\Gamma}$ 的弧长, 则

$$\overline{\alpha}=\frac{d\overline{r}}{d\overline{s}}=\frac{d\overline{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{d\overline{s}}=\big((1-\lambda_0 k)\alpha+\lambda_0\tau\gamma\big)\frac{ds}{d\overline{s}}.$$

直接计算并利用 Frenet 公式, 容易得到

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{s}}=\{-\lambda_0 k'\alpha+[k(1-\lambda_0 k)-\lambda_0\tau^2]\beta+\lambda_0\tau'\gamma\}\left(\frac{ds}{d\overline{s}}\right)^2+[(1-\lambda_0 k)\alpha+\lambda_0\tau\gamma]\frac{d^2s}{d\overline{s}^2},$$

因为 $\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{s}}=\overline{k}\overline{\beta}$, 又 $\overline{\beta}\perp\beta$, 因此将上式两边与 $\beta$ 作内积, 得

$$0=\beta\cdot\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{s}}=[(1-\lambda_0 k)\lambda_0\tau^2]\left(\frac{ds}{d\overline{s}}\right)^2,$$

但 $\frac{ds}{d\bar{s}} \neq 0$, 从而 $(1-\lambda_0 k)k - \lambda_0\tau^2 = 0$, 即

$$\lambda_0(k^2+\tau^2) = k.$$

**注记** 满足题设条件的曲线 $\Gamma$ 称为**孟恩哈姆曲线**. 事实上, 该题的逆命题也成立. 即有: 在题设条件下, 曲线 $\Gamma$ 为孟恩哈姆曲线的充要条件是

$$\lambda_0(k^2+\tau^2) = k,$$

其中 $\lambda_0$ 是常数.

为证明充分性, 作一曲线 $\overline{\Gamma}: \overline{r}(s) = r(s) + \lambda_0\beta$($\lambda_0$ 是条件中给定的常数). 我们来证明如此作出的曲线 $\overline{\Gamma}$ 的副法线 $\overline{\gamma}$ 重合于 $\Gamma$ 的主法线.

$$\begin{aligned}
\overline{r}' &= (1-\lambda_0 k)\alpha + \lambda_0\tau\gamma,\\
\overline{r}'' &= -\lambda_0 k'\alpha + (1-\lambda_0 k)k\beta + \lambda_0\tau'\gamma - \lambda_0\tau^2\beta,\\
&= -\lambda_0 k'\alpha + \lambda_0\tau'\gamma\\
\overline{\gamma} \,\|\overline{r}' \times \overline{r}'' &= -\lambda_0\tau'(1-\lambda_0 k)\beta - \lambda_0\tau k'\beta.
\end{aligned}$$

所以 $\Gamma$ 为孟恩哈姆曲线. □

17. 曲线 $r = \{a(t-\sin t), a(1-\cos t), 4a\cos\frac{t}{2}\}$ 在那些点的曲率半径最大?

**解** 们先来求曲线在任一点处的曲率. 为此, 容易计算得到

$$r'(t) = \{a(1-\cos t), a\sin t, -2a\sin\frac{t}{2}\},$$

$$r''(t) = \{a\sin t, a\cos t, -a\cos\frac{t}{2}\}.$$

因此

$$r' \times r'' = \{-2a^2\sin^3\frac{t}{2}, -2a^2\cos\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2}, -2a^2\sin^2\frac{t}{2}\}$$

$$|r' \times r''| = 2\sqrt{2}a^2\sin^2\frac{t}{2}, \quad |r'| = 2\sqrt{2}a|\sin\frac{t}{2}|$$

所以, 曲率为

$$k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3} = \frac{2\sqrt{2}a^2\sin^2\frac{t}{2}}{16\sqrt{2}a^3|\sin^3\frac{t}{2}|} = \frac{1}{8a|\sin\frac{t}{2}|}.$$

于是, 曲线在任一点处的曲率半径为$8a|\sin\frac{t}{2}|$当且仅当$\sin\frac{t}{2}=\pm1$, 即$t=\pm\pi$时, 曲率半径最大.

当$t=\pi$时,

$$x=a\pi,\quad y=2a,\quad z=0;$$

当$t=-\pi$时,

$$x=-a\pi,\quad y=2a,\quad z=0.$$

因此, 给定曲线在点$(a\pi,2a,0)$和$(-a\pi,2a,0)$处, 曲率半径最大. □

18. 已知曲线$C(\in C^3):r=r(s)$上一点$r(s_0)$的邻近一点$r(s_0+\Delta s)$. 求点$r(s_0+\Delta s)$到点$r(s_0)$的密切平面, 法平面, 从切平面的距离. (设$r(s_0)$点的曲率, 挠率分别为$k_0,\tau_0$).

**解** 设曲线在$r(s_0)$点的基本向量为$\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$, 则由局部规范形式

$$r(s_0+\triangle s)-r(s_0)\approx\alpha_0\triangle s+\frac{1}{2}k_0(\triangle s)^2\beta_0+\frac{1}{6}k_0\tau_0(\triangle s)^3\gamma_0$$

立即得到:

点$r(s_0+\Delta s)$到点$r(s_0)$的密切平面的距离$=|\gamma_0\cdot(r(s_0+\triangle s)-r(s_0))|=\frac{1}{6}k_0\tau_0(\triangle s)^3$. 到点$r(s_0)$的法平面的距离$=|\alpha_0\cdot(r(s_0+\triangle s)-r(s_0))|=\triangle s$. 到点$r(s_0)$的从切平面的距离$=|\beta_0\cdot(r(s_0+\triangle s)-r(s_0))|=\frac{1}{2}k_0(\triangle s)^2$. □

19. 如果曲线$\Gamma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$为一般螺线, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为$\Gamma$的切线向量和主法向量, $R$为$\Gamma$的曲率半径. 证明$\bar{\Gamma}:\bar{\boldsymbol{r}}(s)=R\boldsymbol{\alpha}-\int\boldsymbol{\beta}\,ds$也是一般螺线.

**证明**: 首先注意$s$并不一定是$\bar{\gamma}$的自然参数, 于是

$$\begin{aligned}\bar{r}'(s)&=R'\boldsymbol{\alpha}+R\dot{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}\\&=R'\boldsymbol{\alpha}+Rk\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}\\&=R'\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

所以, $\bar{\Gamma}$与$\Gamma$的切向量平行, 即$\bar{\boldsymbol{\alpha}}\parallel\boldsymbol{\alpha}$.

由$\Gamma$是一般螺线知, $\boldsymbol{\alpha}$与固定方向成定角, 而$\bar{\boldsymbol{\alpha}}\parallel\boldsymbol{\alpha}$, 故$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$也与固定方向成定角, 因此$\bar{\Gamma}$也是一般螺线. □

20. 证明一条曲线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$为一般螺线的充要条件是$(\ddot{r},\dddot{r},r^{(4)})\equiv0$.

**证明**: 利用Frenet公式直接计算如下

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = k\boldsymbol{\beta},$$

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}} = k'\boldsymbol{\beta} - k^2\boldsymbol{\alpha} + k\tau\boldsymbol{\gamma},$$

$$\dddot{\boldsymbol{\alpha}} = -3kk'\boldsymbol{\alpha} + (k'' - k^3 - k\tau^2)\boldsymbol{\beta} + (2k'\tau + k\tau')\boldsymbol{\gamma},$$

于是

$$\begin{aligned}(\ddot{r}, \dddot{r}, r^{(4)}) &= (\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \dddot{\boldsymbol{\alpha}}) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k^2 & k' & k\tau \\ -3kk' & k'' - k^3 - k\tau^2 & 2k'\tau + k\tau' \end{vmatrix} \\ &= k^3(k\tau' - \tau k') \\ &= k^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{k}\right),\end{aligned}$$

而曲线是一般螺线的充要条件是曲率与挠率成定比, 命题得证. □

21. 证明一条曲线的切线不可能同时都是另一条曲线的切线.

**证明**: 反设$\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ ($s$为弧长)与$\bar{\Gamma} : \bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(s)$ ($s$并非弧长)有共同的切线, 则

$$\bar{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda(s)\boldsymbol{\alpha}(s),$$

关于$s$微分上式, 得

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds} = \boldsymbol{\alpha} + \lambda'\boldsymbol{\alpha} + \lambda k\boldsymbol{\beta},$$

注意到$\frac{d\bar{r}}{ds} \parallel \bar{\boldsymbol{\alpha}}$, 为保持切线一致, 必须$\lambda k = 0$. 若$\lambda = 0$, 则$\Gamma$与$\bar{\Gamma}$为同一条曲线, 因此$k = 0$, 此时$\Gamma$与$\bar{\Gamma}$为一对平行直线. □

22. 设在两条曲线$C$和$\bar{C}$的点之间建立了一一对应关系, 使它们在对应点的切线平行. 证明它们在对应点的主法线及副法线也分别平行, 而且它们的挠率和曲率都成比例, 因此如果$C$是一般螺线, $\bar{C}$也是一般螺线.

**证明**: 设$C$的自然参数方程为$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $(\bar{C})$的自然参数方程为$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(\bar{s})$, 则由题设条件$\boldsymbol{\alpha} \parallel \bar{\boldsymbol{\alpha}}$, 即

$$\boldsymbol{\alpha} = \pm\bar{\boldsymbol{\alpha}},$$

上式两边同时关于$s$求导, 得

$$k\boldsymbol{\beta} = \pm\frac{d\bar{s}}{ds}\bar{k}\bar{\boldsymbol{\beta}},$$

于是$\boldsymbol{\beta} \parallel \bar{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\gamma} \parallel \bar{\boldsymbol{\gamma}}$.

一方面, 由于$k\boldsymbol{\beta} = \pm\frac{d\bar{s}}{ds}\bar{k}\bar{\boldsymbol{\beta}}$, 则$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{k}{\bar{k}}$; 另一方面因为$\boldsymbol{\gamma} \parallel \bar{\boldsymbol{\gamma}}$, 所以$\boldsymbol{\gamma} = \pm\bar{\boldsymbol{\gamma}}$, 两边对$s$求导得

$$\tau\boldsymbol{\beta} = \mp\frac{d\bar{s}}{ds}\bar{\tau}\bar{\boldsymbol{\beta}},$$

于是有

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\tau}{\bar{\tau}},$$

结合两方面有

$$\frac{k}{\bar{k}} = \frac{\tau}{\bar{\tau}}, \text{或} \frac{k}{\tau} = \frac{\bar{k}}{\bar{\tau}},$$

据此, 如果$C$为一般螺线, $\bar{C}$也为一般螺线(或反之亦成立). □