《微分几何》第 28 页习题解答

1. 对于圆柱螺线 $x=\cos t, y=\sin t, z=t$, 求它在点 $(1,0,0)$ 的切线和法面.

解: 令 $\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t,t\}$, 则 $\boldsymbol{r}'(t)=\{-\sin t,\cos t,1\}$, 由于 $(1,0,0)$ 点正好是参数 $t=0$ 时的曲线点, 因此

$$\boldsymbol{r}(0)=\{1,0,0\},\qquad \boldsymbol{r}'(0)=\{0,1,1\},$$

从而圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t)$ 在点 $(1,0,0)$ 处的切线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},$$

法平面的方程为

$$y+z=0.$$

□

2. 求三次挠曲线 $\boldsymbol{r}(t)=\{at,bt^2,ct^3\}$ 在点 $t=t_0$ 的切线和法面.

解: 当 $t=t_0$ 时, 有

$$\boldsymbol{r}(t_0)=\{at_0,bt_0^2,ct_0^3\},\qquad \boldsymbol{r}'(t_0)=\{a,2bt_0,3ct_0^2\},$$

所以切线方程为

$$\frac{x-at_0}{a}=\frac{y-bt_0^2}{2bt_0}=\frac{z-ct_0^3}{3ct_0^2},$$

法面方程为

$$ax+2bt_0y+3ct_0^2z-(a^2t_0+2b^2t_0^3+3c^2t_0^5)=0.$$

□

3. 证明圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(\theta)=\{a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta\}$ 的切线和 z 轴作固定角.

证明: 取 z 轴正方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_3=\{0,0,1\}$, 若记 z 轴与圆柱螺线的切线间的夹角为 φ, 则

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{e}_3}{|\boldsymbol{r}'||\boldsymbol{e}_3|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

与圆柱螺线的参数θ无关, 因此φ为定角. □

4. 求悬链线$\boldsymbol{r}(t)=\{t, a\cosh\frac{t}{a}\}\ (-\infty<t<\infty)$从$t=0$起计算的弧长.

解: 从$t=0$起计算的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \\ &= \int_0^t \sqrt{1+\sinh^2(\frac{t}{a})}\ dt \\ &= \int_0^t \cosh\frac{t}{a}\,dt = a\sinh\frac{t}{a}. \end{aligned}$$

□

5. 求抛物线$y=bx^2$对应于$-a\le x\le a$的一段的弧长.

解: 令$x=t$, 抛物线$y=bx^2$的矢量式参数方程可写成$\boldsymbol{r}(t)=\{t, bt^2, 0\}$, 则对应于$-a\le x\le a$的一段的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_{-a}^a |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \\ &= \int_{-a}^a \sqrt{1+4b^2t^2}\,dt \\ &= a\sqrt{1+4a^2b^2}+\frac{1}{2b}\ln|2ab+\sqrt{1+4a^2b^2}|. \end{aligned}$$

□

6. 求星形线$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$的弧长.

解: 令$\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos^3 t, a\sin^3 t, 0\}$, 则$|\boldsymbol{r}'(t)|=\frac{3}{2}a|\sin 2t|$. 根据星形线的对称性, 它的弧长为星形线在第一象限弧长的4倍, 而星形线在第一象限对应的参数t的范围为$0\le t\le\frac{\pi}{2}$, 因此星形线的弧长为

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}a\sin 2t\,dt \\ &= (-3a\cos 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

□

7. 求旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的 $0 \le t \le 2\pi$ 一段的弧长.

解: 令 $\boldsymbol{r}(t) = \{a(t - \sin t), a(1 - \cos t), 0\}$, 则所求弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\, dt \\ &= 8a. \end{aligned}$$

□

8. 求圆柱螺线 $x = 3a\cos t, y = 3a\sin t, z = 4at$ 从它与 xy 平面的交点到任意点 $M(t)$ 的弧长.

解: 令 $\boldsymbol{r}(t) = \{3a\cos t, 3a\sin t, 4at\}$, 则 $\boldsymbol{r}'(t) = \{-3a\sin t, 3a\cos t, 4a\}$. 注意到 $r(t)$ 与 xoy 平面相交时参数 $t = 0$, 所以 $r(t)$ 从 $t = 0$ 到任意点 $M(t)$ 的弧长为

$$s = \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_0^t 5a\, dt = 5at.$$

□

9. 求曲线 $x^3 = 3a^2 y, 2xz = a^2$ 在平面 $y = \frac{a}{3}$ 与 $y = 9a$ 之间的弧长.

解: 令 $x = t$, 则所给曲线的参数方程为 $\boldsymbol{r}(t) = \left\{t, \frac{t^3}{3a^2}, \frac{a^2}{2t}\right\}$. 容易验证 t 是正则参数. 当 $y = \frac{a}{3}$ 时, $t = a$; 当 $y = 9a$ 时, 即 $t = 3a$, 于是所求弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_a^{3a} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt \\ &= \int_a^{3a} \frac{a^4 + 2t^4}{2a^2t^2}\, dt \\ &= 9a. \end{aligned}$$

□

10. 将圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\}$ 化为自然参数表示.

解：因为$\boldsymbol{r}'(t) = \{-a\sin t, a\cos t, b\}$，所以圆柱螺线从$t = 0$起计算的弧长为

$$s = \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\ t$$

令$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 则用弧长$s$作参数, 圆柱螺线的自然参数方程为

$$\boldsymbol{r}(s) = \left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

□

11. 求用极坐标方程$\rho = \rho(\theta)$给定的曲线的弧长表达式.

解：设曲线的参数方程为

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \{\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta, 0\}.$$

因此得到

$$\boldsymbol{r}'(\theta) = \{\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta, \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta, 0\},$$

所以由极坐标$\rho = \rho(\theta)$给定的曲线从$\theta = \theta_0$起计算的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_{\theta_0}^{\theta} |\boldsymbol{r}'(\theta)|\, d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{(\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta)^2 + (\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta)^2}\, d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}\, d\theta. \end{aligned}$$

□