

曲面论综合练习题

1. 已知曲面有参数方程

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

且有 $F(x, y, z) = 0$, 试证明:

$$(1) \mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) / \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

$$(2) I = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

2. 如果 u^*, v^* 是使曲面的 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ 都为对角型的正则参数, 求 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^*}$ 与 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^*}$ 正交的条件.

3. 求空间正则曲线的切线面的曲率线, 比较曲率线的曲率与该曲面的主曲率.

4. 设在曲面上一个固定点和一个与主方向夹角为 θ 的切方向所对应的法曲率记为 $k(\theta)$, 试证明: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta = H$, 其中 H 为曲面的平均曲率.

5. 设曲面 S_1, S_2 的交线 C 的曲率是 k , 曲线 C 在曲面 S_i 上的法曲率是 $k_n^{(i)} (i = 1, 2)$. 设 S_1 与 S_2 在交点的法线之间交角为 θ , 证明:

$$k^2 \sin^2 \theta = (k_n^{(1)})^2 + (k_n^{(2)})^2 - 2k_n^{(1)}k_n^{(2)} \cos \theta.$$

6. 在非脐点处, 如果交角为 θ_0 的任意两个方向的法曲率之和为常数, 证明: $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

7. 设曲面在一点的夹角为 $\frac{2\pi}{m}$ 的 $m (> 2)$ 个切向量所对应的法曲率为 $k_n^{(i)}, i = 1, \dots, m$. 证明: $H = \frac{1}{m}(k_n^{(1)} + \dots + k_n^{(m)})$.

8. 在曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 上每一点沿法线方向截取长为 λ 的一段 (设 λ 充分小), 其端点轨迹构成曲面 $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*(u, v)$. 证明: 在 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{r}^*$ 的对应点上有

$$K^* = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K},$$

$$H^* = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.$$

9. 证明: 若曲面在一点处有三个渐近方向, 且他们两两不共线, 则该点一定是平点.

10. 证明下列命题等价:

- (1) p 是曲面上的脐点;
- (2) p 点处 Gauss 曲率, 平均曲率满足 $H^2 = K$;
- (3) p 点处各个方向上测地挠率 $\tau_g = 0$;
- (4) p 点处各个方向上 k_n 相等.