《微分几何》第 169 页习题解答

1. 求正交网的坐标曲线的测地曲率.

解法 I：对曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的 $u-$ 曲线和 $v-$ 曲线, 分别有

$$\frac{dv}{ds}=0,\quad \frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}};$$

$$\frac{du}{ds}=0,\quad \frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{G}}.$$

由测地曲率公式求得

$$\begin{aligned}
k_{g_u}&=\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^3\sqrt{EG-F^2}=\Gamma_{11}^2\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}},\\
k_{g_v}&=-\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^3\sqrt{EG-F^2}=-\Gamma_{22}^1\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}.
\end{aligned}$$

于是对于正交坐标网, 由 $F=0$ 得

$$\begin{aligned}
k_{g_u}&=\Gamma_{11}^2\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}}\\
&=\frac{2EF_u-EE_v+FE_u}{2(EG-F^2)}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}}\\
&=-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}=-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v},\\
k_{g_v}&=-\Gamma_{22}^1\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}\\
&=-\frac{2GF_v-GG_u+FG_v}{2(EG-F^2)}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}\\
&=\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}=\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}.
\end{aligned}$$

解法 II: 当坐标曲线为正交曲线网时, 由计算测地曲率的Liouville公式,

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta,$$

对 u-曲线, $\theta=0$, 则

$$k_{g_u}=-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v},$$

而对 v-曲线, $\theta=\frac{\pi}{2}$, 则

$$k_{g_v}=\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}.$$

□

2. 证明球面 $\boldsymbol{r}(u,v)=\{a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u\}$ 上曲线的测地曲率 $k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{\sin u\,dv}{ds}$, 其中 θ 表示曲线与经线的交角.

证明: 直接计算得到球面的第一类基本量为

$$E=a^2,\quad F=0,\quad G=a^2\cos^2 u.$$

因为球面的经线为球面在题设参数表示下的 u-曲线, 所以 θ 即为曲线的切方向与 r_u 的夹角, 于是由测地曲率的Liouville公式

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta,$$

注意到

$$\frac{\partial\ln E}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial\ln G}{\partial u}=\frac{-2\sin u}{\cos u},$$

所以

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{\sin\theta}{a\cos u}\sin u,$$

而

$$\frac{dv}{ds}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}=\frac{\sin\theta}{a\cos u},$$

于是

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{\sin u dv}{ds}.$$

□

3. 求位于半径为 R 的球面上半径为 a 的圆周曲线的测地曲率 $(a<R)$.

解: 首先半径为 R 的球面上任何点处沿任意方向的法曲率 $k_n=\pm\frac{1}{R}$, 其上半径为 a 的圆周曲线的曲率 $k=\frac{1}{a}$, 由公式 $k_g^2=k^2-k_n^2$ 得

$$k_g=\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}}=\pm\frac{1}{aR}\sqrt{R^2-a^2}.$$

所以半径为 R 的球面上半径为 a 的圆周曲线的测地曲率 $k_g=\pm\frac{1}{aR}\sqrt{R^2-a^2}$.

由此可见, 半径为 R 的球面上的所有圆周曲线中, 只有大圆曲线是测地线. 而沿大圆曲线, 其主法向量平行于球面的法线. 而对于一般曲面上的挠曲线, 其主法向量平行于曲面的法向量是该曲线成为测地线的充要条件. $\square$

4. 求螺面 $\boldsymbol{r} = \{u\cos v, u\sin v, av\}$ 上螺线 $\boldsymbol{r} = \{u_0\cos v, u_0\sin v, av\}$ ($u_0 =$ 常数) 的测地曲率.

解: 容易知道正螺面的第一基本形式为

$$I = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2,$$

由 $F = 0$ 知 $u-$ 曲线和 $v-$ 曲线正交, 从而 $v-$ 曲线的测地曲率为

$$k_{g_v} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} = \frac{u}{(u^2 + a^2)}.$$

所以圆柱螺线 $x = u_0\cos v, y = u_0\sin v, z = av$ 作为正螺面上的 v 曲线, 其测地曲率为

$$k_{g_v}|_{u=u_0} = \frac{u_0}{u_0^2 + a^2}.$$

$\square$

5. 设曲面 S 上曲率线 C, C 上的点 P 不是 S 的抛物点. 证明 C 在点 P 的测地曲率的绝对值等于在 S 的球面映射下 C 的像在对应点的测地曲率与 C 在点 P 的法曲率之积的绝对值.

证明: 设曲线 C 的 Gauss 映射球面像曲线为 C^*, 记其曲率、测地曲率、法曲率分别为 k^*, k_g^*, k_n^*. 则显然有 $k_n^* = \pm 1$, 且 $k_g^{*2} = k^{*2} - k_n^{*2} = k^{*2} - 1$. 以下计算球面像曲线 $r^*(s) = n(s)$ 的曲率 k^*.

因 C 是曲率线, 由 Rodriques 公式知

$$\frac{dn}{ds} = -k_n\frac{dr}{ds} = -k_n\alpha. \tag{5.1}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{d^2n}{ds^2} &= -\frac{dk_n}{ds}\frac{dr}{ds} - k_n\frac{d^2r}{ds^2} \\ &= -\frac{dk_n}{ds}\alpha - k_nk\beta.\end{aligned} \tag{5.2}$$

应用(5.1)和(5.2)如下直接计算得

$$k^* = \frac{|\frac{dr^*}{ds}\times\frac{d^2r^*}{ds^2}|}{|\frac{dr^*}{ds}|^3} = \frac{|\frac{dn}{ds}\times\frac{d^2n}{ds^2}|}{|\frac{dn}{ds}|^3}$$
$$= \frac{|kk_n^2|}{|k_n|^3} = \frac{k}{|k_n|}.$$

最后

$$k_g^{*2} = k^{*2} - 1 = \frac{k^2}{k_n^2} - 1 = \frac{k_g^2}{k_n^2},$$

即 $|k_g| = |k_g^* k_n|$. □

6. 若曲面 $S: r = r(u,v)$ 上曲线 $(C): u = u(t), v = v(t)$, t 为曲线 (C) 上任意参数. 试导出测地曲率 k_g 的计算公式.

解:

7. 求证旋转曲面的子午线是测地线, 而平行圆仅当子午线的切线平行于旋转轴时是测地线.

证明: 设 xoz 平面中的一条曲线

$$C: \begin{cases} x = f(v), \\ z = g(v), \end{cases}$$

绕 z 轴旋转一周后得到的旋转曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \{f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\},$$

显然旋转曲面的 u-曲线为纬线, v-曲线为经线, 或称为子午线, 于是求得

$$\boldsymbol{r}_u = \{-f\sin u, f\cos u, 0\}, \quad \boldsymbol{r}_v = \{f'\cos u, f'\sin u, g'\};$$

从而第一基本形式为

$$I = ds^2 = f^2du^2 + [(f')^2 + (g')^2]dv^2,$$

因 $F = 0$, 所以旋转曲面的这两族参数曲线是正交的, 由正交网的测地曲率的Liouville公式, 对 v-参数曲线

$$k_{g_v} = \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u} = 0,$$

这说明子午线是测地线. 所以旋转曲面的子午线是测地线. 同样对u-参数曲线

$$k_{g_u} = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v} = -\frac{f'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}.$$

由此纬线圆成为测地线, 当且仅当$f'=0$, 换句话说即过这些纬圆上任何点的母线在该点的切线与旋转轴平行.

对于旋转曲面上测地线的进一步研究, 参考《**曲线与曲面的微分几何**》$P_{251-254}$. □

8. 求证:

(1) 如果测地线同时为渐近线, 则它是一直线.

(2) 如果测地线同时为曲率线, 则它是一平面曲线.

证明: (1) 若曲线为测地线, 则$k_g=0$; 若为渐近曲线, 则$k_n=0$, 由公式$k^2=k_g^2+k_n^2$得$k=0$, 曲线为直线.

(2) 设测地线Γ的挠率为τ_g, 由曲线论的Frenet公式知道

$$\tau_g = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\boldsymbol{\gamma} = \dot{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}) = (\dot{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

这里$\boldsymbol{\alpha}$是Γ的单位切向量, $\boldsymbol{\beta}$是主法线向量, $\boldsymbol{\gamma}$是副法向量.

由Γ是测地线, $k_g=\pm k\sin\theta=0$, 其中θ是β与曲面的法向量之间的夹角. 若$k=0$, 命题成立. 下面假设$k\neq 0$, 则$\sin\theta=0$, 于是$\theta=0$或$\theta=\pi$, 即Γ的主法线向量$\boldsymbol{\beta}$平行于曲面的法向量$\boldsymbol{n}$. 于是$\boldsymbol{\beta}=\pm\boldsymbol{n}$. 因此得到

$$\begin{aligned}
\tau_g &= \left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{n}\right) = \left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)\boldsymbol{n}\\
&= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\\
&= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\boldsymbol{r}_u\right)\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\boldsymbol{r}_v\right)-\left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\boldsymbol{r}_v\right)\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\boldsymbol{r}_u\right)\right].
\end{aligned}$$

另外

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds},\quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \boldsymbol{n}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{n}_v\frac{dv}{ds},$$

把上两式代入化简得

$$\tau_g = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} (\frac{dv}{ds})^2 & -\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} & (\frac{du}{ds})^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

由题设Γ又是曲率线, 它满足曲率线的微分方程, 即上式右端的行列式为0.因此$\tau_g=0$, 即曲线为平面曲线.

另证: 对已经得到的关系式$\boldsymbol{\beta}=\pm\boldsymbol{n}$两边关于弧长求导得$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\mp k\boldsymbol{\alpha}\pm\tau\boldsymbol{\gamma}$, 而$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-k_n\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$, 代入并两边与$\boldsymbol{\gamma}$点积得到$\tau=0$. □

注: 把测地线Γ在p点的挠率称为曲面Σ在p点关于切方向的**测地挠率**, 因此我们得到结论: 曲面上一条曲线Γ为曲率线的充要条件是曲线Γ的每点处关于它的切方向的测地挠率为零.

9. 已知曲面的第一基本形式$I=v(du^2+dv^2)$. 证明它上面的测地线是uv平面上的抛物线.

证明: 由题设, $E=G=v, F=0$, 于是

$$E_v=G_v=1,\quad E_u=G_u=0.$$

由$F=0$知曲面的坐标网是正交网, 由测地线的微分方程得

$$\begin{cases} \frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{v}}\cos\theta, \\ \frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{v}}\sin\theta, \\ \frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{2\sqrt{EG}}(\frac{E_v}{\sqrt{E}}\cos\theta-\frac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\theta)=\frac{1}{2v}\frac{du}{ds}, \end{cases}$$

由前两个方程得

$$\sin\theta du=\cos\theta dv,\quad \text{即}\quad \frac{du}{dv}=\cot\theta. \tag{9.1}$$

由第3个方程得

$$d\theta=\frac{1}{2v}du, \tag{9.2}$$

由等式$\sin\theta d\theta-\sin\theta d\theta=0$及(9.1), (9.2)两式得$\tan\theta d\theta=\frac{dv}{2v}$, 积分得$\cos\theta=\frac{C}{\sqrt{v}}$($C$为积分常数). 于是

$$\frac{du}{dv}=\frac{C}{\sqrt{v-C^2}}.$$

所以

$$du = \frac{Cdv}{\sqrt{v - C^2}},$$

积分得

$$u = 2C\sqrt{v - C^2}, \quad 或 \quad u^2 = 4C^2(v - C^2).$$

所求的测地线在 uv 平面上是抛物线. □

10. 求正螺面 $r = \{u\cos v, u\sin v, av\}$ 上的测地线.

解： 直接求得正螺面的第一基本量为

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + a^2.$$

由 $F = 0$ 知正螺面的坐标曲线正交, 并由测地线的微分方程得

$$\frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{E}{G}}\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\tan\theta \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{du} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\tan\theta \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d\ln(u^2 + a^2)}{du}\tan\theta. \end{aligned} \tag{10.2}$$

由 (10.2) 得

$$\cot\theta d\theta = -\frac{1}{2}d\ln(u^2 + a^2),$$

积分得

$$\ln\sin\theta = -\frac{1}{2}\ln(u^2 + a^2) + \ln C,$$

于是

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{C}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \\ \cos\theta &= \frac{\sqrt{u^2 + a^2 - C^2}}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \end{aligned}$$

由上面结果并根据 (10.1) 式得

$$dv = \frac{Cdu}{\sqrt{u^2 + a^2 - C^2}\sqrt{u^2 + a^2}},$$

积分得

$$v = C\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2-C^2}\sqrt{u^2+a^2}}$$

为所求正螺面上测地线段的曲线坐标关系式. □

11. 利用Liouville公式证明: (1) 平面上的测地线为直线; (2) 圆柱面上的测地线为圆柱螺线.

证明: 由正交网时测地线的微分方程, 平面 $I = du^2 + dv^2$ 上的测地线的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{dv}{du} = \tan\theta \\ \frac{d\theta}{du} = 0 \end{cases}$$

则有 $\theta = \text{const.}$, $v = u\tan\theta + c$ (c为积分常数), 即平面上的测地线是直线.

在圆柱面 $\boldsymbol{r}(u,v) = \{a\cos u, a\sin u, v\}$ 上,

$$I = a^2\ du^2 + dv^2 = d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2 \quad (\bar{u} = au, \bar{v} = v).$$

类似于平面的情形, 可知圆柱面上测地线的方程为

$$\bar{v} = \bar{u}\tan\theta + c \quad 或 \quad v = (a\tan\theta)u + c,$$

其中 c 为积分常数, θ 为常数. 对应的矢量式参数方程为

$$\boldsymbol{r}(u) = \{a\cos u, a\sin u, (a\tan\theta)u + c\},$$

这正是圆柱面上的圆柱螺线, 即圆柱面上的测地线是圆柱螺线, 当然包括所有直母线($\theta = \frac{\pi}{2}$)和纬圆($\theta = 0$)在内. □

12. 证明: 若曲面上曲率处处不为零的所有测地线均为平面曲线, 则它必为曲率线.

证明 I: 利用第8 题(2) 的公式

$$\tau_g = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} (\frac{dv}{ds})^2 & -\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} & (\frac{du}{ds})^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

立即可知: $\tau_g = 0$ 的充要条件是上式右端行列式为0, 即测地线必为曲率线.

证明 II： 由测地曲率 $k_g=0$ 知 $\boldsymbol{\beta}=\pm\boldsymbol{n}$, 两边关于弧长求导得 $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\pm(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})$, 再结合 $\tau=0$ 得 $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\pm k\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\pm k_n\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$. 由 Rodriques 公式可见结论成立.

证明III： 由 $\boldsymbol{\beta}=\pm\boldsymbol{n}$ 及曲线是平面曲线的假设, 容易验证沿测地线, 曲面的法线组成一可展曲面, 从而该测地线是曲率线. (**曲面上一条曲线是曲率线的充分必要条件是沿该曲线, 曲面的法线组成一可展曲面.**) □

13. 如果在曲面上引进半测地坐标网:

$$ds^2=du^2+Gdv^2,$$

求证:

$$k_g ds=d\left[\tan^{-1}(\sqrt{G}\frac{dv}{du})\right]+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}dv.$$

证明： 由题设, $E=1, F=0, G=G(u,v)$, 代入 Liouville 公式

$$\begin{aligned}k_g&=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta\\&=\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{2}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta\\&=\frac{d\theta}{ds}+\frac{\sqrt{G}}{2}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\frac{dv}{ds}\\&=\frac{d\theta}{ds}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds}.\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\frac{d\left[\tan^{-1}(\sqrt{G}\frac{dv}{du})\right]}{ds}&=\frac{d\left[\tan^{-1}(\sqrt{E}\tan\theta)\right]}{ds}\\&=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{1+\tan^2\theta}\frac{d\theta}{ds}\\&=\frac{d\theta}{ds}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}k_g&=\frac{d\theta}{ds}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds}\\&=\frac{d\left[\tan^{-1}(\sqrt{G}\frac{dv}{du})\right]}{ds}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds},\end{aligned}$$

即

$$k_g ds = d\left[\tan^{-1}(\sqrt{G}\frac{dv}{du})\right] + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}dv.$$

□

14. 给出曲面的第一基本形式是

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2,$$

如果曲面上的测地线与u-线交于角α时, 求证

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

证明： 由题设, $E=1, F=0, G=G(u,v)$. 测地线与$u-$线交角为α, 即测地线与r_u的交角为α, 将$\theta=\alpha, E=1, F=0, G=G(u,v)$代入Liouville公式得

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds},$$

对测地线, 有$k_g=0$, 从而上式即为

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

□

15. 证明: 曲面上有两族测地线交于定角, 则曲面是可展曲面.

证明： 设两族测地线交于定角θ, 则$0<\theta\le\frac{\pi}{2}$. 我们取其中一族测地线为曲面的u-曲线, v-曲线由它的正交轨线组成. 由计算测地曲率的Liouville公式, 对u-曲线, 有测地曲率

$$k_{g_u} = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v} = 0, \tag{1}$$

对另一族测地线, 同样由Liouville公式有,

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta = 0, \tag{2}$$

由题设条件, θ是常值, 那么从(1)和(2)有

$$\frac{1}{2\sqrt{E}}\,\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta=0,$$

注意到$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$, 我们有

$$\frac{1}{2\sqrt{E}}\,\frac{\partial\ln G}{\partial u}=0,$$

或

$$\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}=0,$$

于是$(\sqrt{G})_u=0$, 由半测地网(u-线为测地线)时高斯曲率的计算公式

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}},$$

知$K=0$, 即曲面为可展曲面.

说明：事实上, 本题的条件可减弱成如下命题：若在曲面上存在两族具有绝对常数测地曲率的曲线, 而这两族测地线相交成定角$\theta\,(0<\theta\leq\frac{\pi}{2})$. 则此曲面必是负常高斯曲率曲面或可展曲面.

证明：我们取其中一族测地线为曲面的u-曲线, 并设其测地曲率为常数a, 则由计算测地曲率的Liouville公式, 有

$$k_{g_u}=-\frac{1}{2\sqrt{G}}\,\frac{\partial\ln E}{\partial v}=a, \tag{3}$$

另一族测地线的测地曲率设为常数b, 同样由计算测地曲率的Liouville公式, 有

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\,\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\,\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta=b, \tag{4}$$

由题设条件, θ是常值, 那么从(3)和(4)有

$$a\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\,\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta=b,$$

注意到$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$, 则$\sin\theta>0$, 令$c=\frac{b-a\cos\theta}{\sin\theta}$(常数), 代入(4)式得

$$\frac{1}{2\sqrt{E}}\,\frac{\partial\ln G}{\partial u}=c, \tag{5}$$

将(3)和(5)进行适当变形, 可得到

$$\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v = -a(\sqrt{E})_v,$$
$$\left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u = c(\sqrt{G})_u,$$

由高斯方程, 对曲面上的正交坐标网, 曲面的高斯曲率

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v + \left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{EG}}[-a(\sqrt{E})_v + c(\sqrt{G})_u] \\ &= -(a^2+c^2). \end{aligned}$$

显然, 当$a=c=0$时, $K\equiv 0$, 曲面为可展曲面; 而当a,c不全为0时, K是负常数, 曲面是具有负常数高斯曲率的曲面. □

16. 求半径为R的球面上测地三角形三内角之和.

解: 设半径为R的球面的参数方程为

$$\boldsymbol{r}(\theta,\varphi) = \{R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\}.$$

其第一、二类基本量分别为

$$E = R^2\cos^2\theta, \quad F = 0, \quad G = R^2;$$

$$L = -R\cos^2\theta, \quad M = 0, \quad N = -R.$$

于是高斯曲率为

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{R^2\cos^2\theta}{R^4\cos^2\theta} = \frac{1}{R^2}.$$

由Gauss-Bonnet定理, 测地三角形的三内角之和为

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= \pi + \iint_T K\,d\sigma \\ &= \pi + \frac{\sigma}{R^2}. \end{aligned}$$

其中 T 是由测地线围成的测地三角形区域, σ 是该测地三角形的面积. □

17. 利用Gauss-Bonnet公式证明: 若曲面 S 上存在两族交于定角的测地线, 则它的高斯曲率处处为零.

证明: 若不然, 设存在点 $P \in S$, 使得 $K(P) \neq 0$, 则由 K 的连续性, 存在含 P 的一个邻域 U, 使得 $K|_U \neq 0$, 不妨设 $K|_U > 0$. 在 U 内取族中各两条交成定角的测地线围成一测地四边形, 其外角和正好是 2π. 由Gauss-Bonnet定理容易得到 $\iint\limits_U KdA = 0$, 矛盾. □

18. 若曲面 S 的高斯曲率处处小于零, 则曲面 S 上不存在围成单连通区域的光滑闭测地线.

证明: 反设曲面 S 上存在围成单连通区域 T 的光滑闭测地线 Γ, 由Gauss-Bonnet定理有

$$\iint\limits_T Kd\sigma + \oint\limits_{\partial T} k_g ds = 2\pi,$$

而 $\partial T = \Gamma$ 是测地线, 因此 $k_g|_{\partial T} = 0$. 于是上式为

$$\iint\limits_T Kd\sigma = 2\pi,$$

而若该式成立, 则 S 上至少应有一点, 使该点的Gauss曲率为正, 这与题设矛盾, 反设不成立, 命题得证. □

19. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是沿曲面上曲线 (C) 的向量场, f 是定义在 (C) 上的数量函数. 证明下列绝对微分的运算性质:

(1) $D(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = D\boldsymbol{a} + D\boldsymbol{b}$;

(2) $D(f\boldsymbol{a}) = df\boldsymbol{a} + fD\boldsymbol{a}$;

(3) $D(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = D\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot D\boldsymbol{b}$.

证明: 设 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 是曲面上的基向量场, 则可令

$$\boldsymbol{a} = \sum a^i \boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{b} = \sum b^j \boldsymbol{r}_j, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

于是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \sum (a^i + b^i)\boldsymbol{r}_i, \quad i = 1, 2$$

(1) 由绝对微分的定义

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= D(\sum(a^i+b^i)\boldsymbol{r}_i) \\ &= \sum[d(a^k+b^k)+\Gamma^k_{ij}(a^i+b^i)du^j]\boldsymbol{r}_k \\ &= \sum(da^k+\Gamma^k_{ij}a^idu^j)\boldsymbol{r}_k+\sum(db^k+\Gamma^k_{ij}a^idu^j)\boldsymbol{r}_k \\ &= D\boldsymbol{a}+D\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} D(f\boldsymbol{a}) &= D(\sum fa^i\boldsymbol{r}_i) \\ &= \sum(d(fa^k)+\Gamma^k_{ij}(fa^i)du^j)\boldsymbol{r}_k \\ &= \sum((df)a^k+fda^k+f\Gamma^k_{ij}a^idu^j)\boldsymbol{r}_k \\ &= df(\sum a^k\boldsymbol{r}_k)+f\sum(da^k+\Gamma^k_{ij}a^idu^j)\boldsymbol{r}_k \\ &= df\boldsymbol{a}+fD\boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} &D\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot D\boldsymbol{b} \\ &= \sum(da^i+\Gamma^i_{kl}a^kdu^l)\boldsymbol{r}_i\cdot(\sum b^j\boldsymbol{r}_j)+\sum(db^j+\Gamma^j_{pq}b^pdu^q)\boldsymbol{r}_j\cdot(\sum a^i\boldsymbol{r}_i) \\ &= \sum g_{ij}(da^ib^j)+\sum g_{ij}\Gamma^i_{kl}a^kb^jdu^l+\sum g_{ij}(db^ja^i)+\sum g_{ij}\Gamma^j_{pq}a^ib^pdu^q \\ &= \sum g_{ij}d(a^ib^j)+\sum(g_{kj}\Gamma^k_{il}+g_{ik}\Gamma^k_{jl})a^ib^jdu^l \\ &= \sum g_{ij}d(a^ib^j)+\sum(\Gamma_{ilj}+\Gamma_{jli})a^ib^jdu^l \\ &= \sum g_{ij}d(a^ib^j)+\sum\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}du^la^ib^j \\ &= \sum g_{ij}d(a^ib^j)+\sum(dg_{ij})a^ib^j \\ &= d(\sum g_{ij}a^ib^j) \\ &= d(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}). \end{aligned}$$

上面我们利用了 $\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j=g_{ij}$. □

20. 设 $\boldsymbol{a}(s),\boldsymbol{b}(s)$ 是沿曲面上曲线 $(C):\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的两个平行向量场. 证明 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$常数, 并由此证明当曲面上一点处二向量沿曲面上曲线作勒维-其维塔 (Levi-Civita) 平行移动时, 它们的长度和夹角不变.

证明： 由题设 $\boldsymbol{a}(s), \boldsymbol{b}(s)$ 是沿 (C) 的两个平行向量场, 则 $D\boldsymbol{a} = 0, D\boldsymbol{b} = 0$, 由绝对微分的性质 $d(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = D\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot D\boldsymbol{b}$ 可知

$$d(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = 0,$$

即 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$ 常数, 这说明 Levi-Civita 平行移动保持内积不变, 从而保持向量的长度和两向量场的夹角不变. $\square$