《微分几何》第 129 页习题解答

1. 证明曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=\{u^2+\frac{1}{3}v, 2u^3+uv, u^4+\frac{2}{3}u^2v\}$ 是可展曲面.

证明：将原曲面方程改写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(u,v) &= \{u^2,2u^3,u^4\}+v\{\frac{1}{3},u,\frac{2}{3}u^2\}\\ &\overset{\text{记}}{=} \boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u).\end{aligned}$$

它可以看成是以 $\boldsymbol{a}(u)$ 作为导线, 以 $\boldsymbol{b}(u)$ 作为直母线方向的直纹面. 因此给定曲面为可展曲面的充要条件是 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$. 因为

$$\boldsymbol{a}'=\{2u,6u^2,4u^3\},\quad \boldsymbol{b}'=\{0,1,\frac{4}{3}u\}.$$

所以

$$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=\begin{vmatrix}2u & 6u^2 & 4u^3\\ \frac{1}{3} & u & \frac{2}{3}u^2\\ 0 & 1 & \frac{4}{3}u\end{vmatrix}=0,$$

即曲面为可展曲面. □

2. 证明曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=\{\cos v-(u+v)\sin v, \sin v+(u+v)\cos v, u+2v\}$ 是可展曲面(它是圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(v)=\{\cos v,\sin v,v\}$ 的切线曲面).

证法 I：将原曲面方程改写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(u,v) &= \{\cos v-v\sin v, \sin v+v\cos v, 2v\}+u\{-\sin v,\cos v,1\}\\ &\overset{\text{记}}{=} \boldsymbol{a}(v)+u\boldsymbol{b}(v).\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}' &= \{-2\sin v-v\cos v, 2\cos v-v\sin v, 2\},\\ \boldsymbol{b}' &= \{-\cos v,-\sin v,0\}.\end{aligned}$$

可直接验证

$$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=\begin{vmatrix}-2\sin v-v\cos v & 2\cos v-v\sin v & 2\\ -\sin v & \cos v & 1\\ -\cos v & -\sin v & 0\end{vmatrix}=0.$$

于是给定曲面是可展曲面.

证法 II： 首先知道曲面的 u-线是直线, 其次求曲面的法向量. 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_u &= \{-\sin v, \cos v, 1\},\\ \boldsymbol{r}_v &= \{-2\sin v - (u+v)\cos v, 2\cos v - (u+v)\sin v, 2\},\end{aligned}$$

因此

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sin v, -\cos v, 1\}.$$

故 $\boldsymbol{n}$ 沿直母线(即 u-线)是不变的, 根据可展曲面定义知题设曲面是可展曲面.

证法III： 直接验证圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(v) = \{\cos v, \sin v, v\}$ 的切线面 $\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{r}(v) + u\boldsymbol{r}'(v)$ 正是题中的曲面, 而正则曲线的切线面总是可展曲面, 故题设曲面为可展曲面. □

3. 证明正螺面 $\boldsymbol{r}(u,v) = \{v\cos u, v\sin u, au+b\}$ 不是可展曲面.

证明： 令 $\boldsymbol{a}(u) = \{0, 0, au+b\}$, $\boldsymbol{b}(u) = \{\cos u, \sin u, 0\}$, 则原方程可以写成

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u),$$

而且

$$\boldsymbol{a}'(u) = \{0, 0, a\}, \quad \boldsymbol{b}'(u) = \{-\sin u, \cos u, 0\},$$

所以

$$(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}') = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \end{vmatrix} = a \neq 0,$$

即正螺面不是可展曲面. □

4. 证明挠曲线的主法线曲面和副法线曲面都不是可展曲面.

证明： 设挠曲线的自然参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, 它的主法向量和副法向量分别为 $\boldsymbol{\beta}(s)$ 和 $\boldsymbol{\gamma}(s)$, 则主法线曲面 Σ_1 和副法线曲面 Σ_2 分别为

$$\begin{aligned}\Sigma_1: &\quad \boldsymbol{r}_1(s,u) = \boldsymbol{r}(s) + u\boldsymbol{\beta}(s),\\ \Sigma_2: &\quad \boldsymbol{r}_2(s,v) = \boldsymbol{r}(s) + v\boldsymbol{\gamma}(s).\end{aligned}$$

由Frenet公式, 我们得到

$$(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, -k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma}) = \tau(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \tau \neq 0;$$
$$(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, -\tau\boldsymbol{\beta}) = \tau(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \tau \neq 0.$$

因此, 挠曲线的主法线曲面和副法线曲面都不是可展曲面.

由证明不难看出, 对于平面曲线, 其主法线曲面和副法线曲面都是可展曲面. 另外, 我们还知道无论是平面曲线还是挠曲线, 其切线曲面总是可展曲面. □

5. 求平面族$x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha = 1$的包络.

解: 令$F(x,y,z,\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha - 1$, 则题设平面族的包络满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha) = 0, \\ F_\alpha(x,y,z,\alpha) = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha - 1 = 0, \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha - z\cos\alpha = 0, \end{cases}$$

消去α, 得

$$x^2 + (y-z)^2 = 1,$$

为所求的平面族的包络.

令

$$\begin{cases} y^* = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-z), \\ z^* = \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z), \end{cases}$$

这表明y-轴与z-轴进行了旋转, 得到了新的y^*-轴和z^*-轴, 代入$x^2 + (y-z)^2 = 1$, 我们有

$$x^2 + 2y^{*2} = 1,$$

这是一椭圆柱面, 即包络曲面是一椭圆柱面. □

6. 求平面族$\alpha^2 x + 2\alpha y + 2z = 2\alpha$的包络.

解： 令 $F(x,y,z,\alpha)=\alpha^2 x+2\alpha y+2z-2\alpha$, 则 $F_\alpha(x,y,z,\alpha)=2\alpha x+2y-2$. 由

$$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha)=0, \\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0, \end{cases}$$

消去 α, 得

$$2xz-(y-1)^2=0,$$

为所求的平面族的包络, 这是以 $(0,1,0)$ 为顶点的锥面. □

7. 证明柱面、锥面、任意空间曲线的切线面为可展曲面.

证明： 柱面、锥面、切线面的参数方程可统一写成 $\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$, 其中 $\boldsymbol{r}(u)$ 是导线的方程, $\boldsymbol{b}(u)$ 为直母线的方向向量.

对柱面, $\boldsymbol{b}(u)=$ 常向量, 因此 $\boldsymbol{b}'(u)=0$, 从而 $(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$.

对锥面, $\boldsymbol{r}(u)=$ 常向量, 因此 $\boldsymbol{r}'(u)=0$, 从而 $(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$.

对空间曲线的切线面, $\boldsymbol{b}(u)=\boldsymbol{r}'(u)$, 因此 $(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=0$, 据此, 柱面、锥面、任意空间曲线的切线面都是可展曲面. □

8. 证明 $\boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{r}_{uv}=0$ 的曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 是柱面.

证明 I： 由 $\boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{r}_{uv}=0$ 知 $\boldsymbol{r}_u$ 是常向量, 设此常向量为 $\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{b},$$

两边对 u 积分, 得

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(v)+u\boldsymbol{b},$$

即曲面 S 是以曲线 $\boldsymbol{a}(v)$ 为准线, $\boldsymbol{b}$ 为直母线方向的柱面.

证明 II： 仍记曲面的第二类基本量为 L,M,N, 则

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

于是, 曲面 S 的 Gauss 曲率 $K\equiv 0$, 从而 S 为可展曲面. 不妨假设 S 具有参数表示 $\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(v)+u\boldsymbol{b}$, 再利用条件 $\boldsymbol{r}_{uv}=0$ 知 $\boldsymbol{b}'(u)=0$, 即 $\boldsymbol{b}=\text{const.}$, 这表明曲面 S 为柱面. □