

2012—2013 学年度第一学期数统学院期末考试卷

《微分几何》(A 卷)

学号_____ 姓名_____ 任课教师_____

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

得分	评卷教师

一、 填空题 (每空 2 分, 共 34 分)

- R^3 中圆柱 $r(\theta, t) = (a \cos \theta, a \sin \theta, t)$, 当 $t = \frac{1}{2}$ 时, 对应的参数曲线称为_____; 该曲线的自然方程为_____.
- 设单位球面的参数方程为 $r(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$. 其指向球心的单位法向量场 $\vec{n} =$ _____. φ -曲线($\theta = \frac{\pi}{3}$)和 θ -曲线($\varphi = \frac{\pi}{2}$)的夹角为_____; 面积元是_____.
- 圆柱面上直母线的测地曲率为_____; 法曲率为_____.
- 曲面上一点是脐点当且仅当第一、二类基本量满足_____. 曲面在平点处的法曲率为_____; 高斯曲率为_____; 平均曲率为_____.
- 平面上, 曲率为 0 的曲线必为_____; R^3 中挠率为 0 的曲线必为_____.
- 沿渐近方向(存在的话)曲面的弯曲为_____, 沿主方向曲面的弯曲_____.
- 下列说法正确的是_____.
 - 平面上, 测地线是连结两点的最短线.
 - 球面上, 任何两点都可用测地线相联结.

C. 在去掉一条直母线的圆柱面上, 连结任何两点都有无数条测地线.

D. Gauss 曲率为负常数的曲面上, 测地三角形的内角和小于 π .

8. 下列说法正确的是_____.

A. 等距等价的两曲面必具有相同的内蕴几何.

B. 等距等价的两曲面必合同等价.

C. 合同等价的两曲面必等距等价.

D. 共形等价的两曲面必等距等价.

得分	评卷教师

二、 设曲面的第一基本形式为 $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2}$. 完成下列

各题 (每小题 6 分, 共 18 分)

(1) 求该曲面的 Gauss 曲率.

(2) 该曲面可否与某球面等距等价, 为什么?

(3) 证明在该曲面上不存在围成单连通区域的光滑闭测地线.

得分	评卷教师

三、 通过解微分方程求解圆柱面 $r(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$ 上的测地线. (满分 8 分)

得分	评卷教师

四、 设 C 是某曲面 S 上一条曲率处处不为 0 的曲线. 解答下列各题 (每小题 8 分, 共 24 分)

(1) 若 C 既是 S 上的测地线又是曲率线, 证明 C 必为平面曲线.

(2) 若 C 既是 S 上的测地线又是平面曲线, 证明 C 必为曲率线.

(3) 举例说明 C 可以同时是 S 上的曲率线和平面曲线, 但不是测地线.

得分	评卷教师

五、 设曲面 $z = axy$, 其中 a 为非零常数. 完成下列各题 (满分 16 分)

(1) 验证该曲面的 x -曲线和 y -曲线均不是测地线. (4 分)

(2) 求曲面在原点处的主曲率, Gauss 曲率, 平均曲率. (8 分)

(3) 对(2)中主曲率的计算结果给出恰当的几何意义解释. (4 分)