《微分几何》第 113 页习题解答

1. 计算悬链面$\boldsymbol{r}(u,v)=\{\cosh u\cos v,\cosh u\sin v,u\}$的第一、第二类基本量.

解：首先直接计算下列各量:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}_u=\{\sinh u\cos v,\sinh u\sin v,1\},\\
&\boldsymbol{r}_v=\{-\cosh u\sin v,\cosh u\cos v,0\},\\
&\boldsymbol{r}_{uu}=\{\cosh u\cos v,\cosh u\sin v,0\},\\
&\boldsymbol{r}_{uv}=\{-\sinh u\sin v,\sinh u\cos v,0\},\\
&\boldsymbol{r}_{vv}=\{-\cosh u\cos v,-\cosh u\sin v,0\},\\
&\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\{-\cosh u\cos v,-\cosh u\sin v,\sinh u\cosh u\},\\
&\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{1}{\cosh u}\{-\cos v,-\sin v,\sinh u\}.
\end{aligned}
$$

于是, 悬链面的第一, 第二类基本量分别为

$$
\begin{aligned}
&E=\boldsymbol{r}_u^2=\cosh^2 u,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0,\quad G=\boldsymbol{r}_v^2=\cosh^2 u;\\
&L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=-1,\quad M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=1.
\end{aligned}
$$

□

2. 计算抛物面$2x_3=5x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2$在原点处的第一、第二类基本量.

解： 由Monge形式表示的曲面的第一, 第二类基本量的计算公式, 先计算

$$p=\frac{\partial x_3}{\partial x_1}=5x_1+2x_2,\quad q=\frac{\partial x_3}{\partial x_2}=2(x_1+x_2),$$

$$r=\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2}=5,\quad s=\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1\partial x_2}=2,\quad t=\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2}=2.$$

再计算

$$\begin{aligned}
&E = 1 + p^2 = 1 + (5x_1 + 2x_2)^2,\\
&F = pq = 2(x_1 + x_2)(5x_1 + 2x_2),\\
&G = 1 + q^2 = 1 + 4(x_1 + x_2)^2;\\
&L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{5}{\sqrt{1 + (5x_1 + 2x_2)^2 + 4(x_1 + x_2)^2}},\\
&M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + (5x_1 + 2x_2)^2 + 4(x_1 + x_2)^2}},\\
&N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + (5x_1 + 2x_2)^2 + 4(x_1 + x_2)^2}}.
\end{aligned}$$

所以在原点处, 即 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 时, 抛物面的第一、第二基本形式为

$$\begin{aligned}
I &= dx_1^2 + dx_2^2,\\
II &= 5dx_1^2 + 4dx_1dx_2 + 2dx_2^2.
\end{aligned}$$

□

3. 证明：对于正螺面 $\boldsymbol{r}(u, v) = \{u\cos v, u\sin v, bv\}$ 处处有 $EN - 2FM + GL = 0$.

证明： 容易算出正螺面的第一、第二基本形式分别为

$$\begin{aligned}
I &= du^2 + (u^2 + b^2)dv^2,\\
II &= \frac{-2b}{\sqrt{u^2 + b^2}}dudv.
\end{aligned}$$

于是 $EN - 2FM + GL = 0$. □

4. 求出抛物面 $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ 在 $(0, 0)$ 点和方向 $(dx : dy)$ 的法曲率.

解： 先计算

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = ax, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = by,$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = b.$$

再计算

$$
\begin{aligned}
&E = 1 + p^2 = 1 + a^2x^2,\\
&F = pq = abxy,\\
&G = 1 + q^2 = 1 + b^2y^2;\\
&L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2x^2+b^2y^2}},\\
&M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0,\\
&N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{b}{\sqrt{1+a^2x^2+b^2y^2}}.
\end{aligned}
$$

所以, 在原点抛物面的第一、第二基本形式分别为

$$
\begin{aligned}
&I = dx^2 + dy^2,\\
&II = adx^2 + bdy^2.
\end{aligned}
$$

于是, 在原点沿方向 $(dx : dy)$ 的法曲率

$$
k_n = \frac{II}{I} = \frac{adx^2 + bdy^2}{dx^2 + dy^2}
$$

□

5. 已知平面 π 到单位球面 S 的中心距离为 $d(0 < d < 1)$, 求 π 与 S 交线的曲率与法曲率.

解: 容易知道, π 与 S 的交线是一半径为 $\sqrt{1-d^2}$ 的圆, 故交线的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}$. 下面用两种方法求交线的法曲率.

【法 I】 单位球面的单位法矢量 $\boldsymbol{n} = \pm(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$, 则 $d\boldsymbol{n} = d\boldsymbol{r}$, 从而

$$
II = \pm d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{n} = -d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = \pm I.
$$

由法曲率的公式 $k_n = \frac{II}{I}$ 知道单位球面上在任何点沿任何方向的法曲率都是 ± 1. 故 π 与 S 的交线的法曲率为 ± 1.

【法 II】 因为过球面上任何一点, 以任何方向为切方向的法截线都是球大圆, 故由公式 $k_n = k\cos\theta = k_0$ (其中 k_0 是法截线的曲率)知, π 与 S 的交线的法曲率为 ± 1. □

6. 利用法曲率公式 $k_n = \frac{I\!I}{I}$ 证明在球面上对于任何曲纹坐标, 第一、二类基本量成比例.

证明: 设球面中心的径矢为 r_0, 半径为 a, 则可令球面的单位法矢(背向球心)为 $n = \frac{1}{a}(r - r_0)$. 于是

$$I\!I = -dn \cdot dr = -\frac{1}{a}\, dr^2 = -\frac{1}{a}\, I,$$

即在球面上每一点, 等式

$$-\frac{1}{a}(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2) = (Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)$$

关于 $\frac{du}{dv}$ 都是一个恒等式, 也就是

$$L : M : N = E : F : G.$$

从关系式也可以直接推得第二和第一两类基本量成比例, 如

$$L = -r_u \cdot n_u = -r_u \cdot (\frac{1}{a}r_u) = -\frac{1}{a}r_u \cdot r_u = -\frac{1}{a}E,$$

同法, $M = -\frac{1}{a}F, \quad N = -\frac{1}{a}G.$ □

7. 求证在正螺面上有一族渐近线是直线, 另一族渐近线是螺线.

证明: 对正螺面 $\boldsymbol{r}(u,v) = \{u\cos v, u\sin v, bv\}$, 容易求出

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + b^2;$$

$$L = 0, \quad M = \frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}}, \quad N = 0.$$

由于 $LN - M^2 = \frac{-b^2}{u^2+b^2} < 0$, 所以正螺面上的点都是双曲点. 从而曲面上存在两族渐近曲线(即曲面的渐近网). 而 $L = N = 0$, 则曲纹坐标网正是曲面的渐近网.

对于正螺面, 它的 $u-$ 曲线是平面 $z = bv_0$ 上的直线 $\begin{cases} x = u\cos v_0, \\ y = u\sin v_0 \end{cases}$, 而 $v-$ 曲线是螺线 $r(v) = \{u_0\cos v, u_0\sin v, bv\}$, 因此正螺面的渐近曲线是直线和螺线. □

8. 求曲面 $z = xy^2$ 的渐近网.

解：所给曲面的参数方程可写成

$$\boldsymbol{r}(x, y) = \{x, y, xy^2\},$$

简单计算可求出它的第一、第二类基本量分别为

$$E = 1 + y^4, \quad F = 2xy^3, \quad G = 1 + 4x^2y^2;$$

$$L = 0, \quad M = \frac{2y}{\sqrt{1 + 4x^2y^2 + y^4}}, \quad N = \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2y^2 + y^4}}.$$

于是渐近曲线的微分方程 $Ldx^2 + 2Mdxdy + Ndy^2 = 0$ 即为

$$dy(4ydx + 2xdy) = 0.$$

(1) 若 $dy = 0$, 则 $y = C_1$ (常数);

(2) 若 $4ydx + 2xdy = 0$, 即 $\frac{2}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0$, 则 $x^2y = C_2$ (常数). □

9. 证明每一条曲线在它的主法线曲面上是渐近曲线.

证明：设曲线 C 的自然参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, 则其主法线曲面 Σ 的参数方程为

$$\boldsymbol{r}^*(s, v) = \boldsymbol{r}(s) + v\boldsymbol{\beta}(s).$$

【法 I】 按公式 $k_n = k\cos\theta$ 证明曲线 C 的法曲率为零. 首先

$$\boldsymbol{r}_s^* = \boldsymbol{\alpha} + v\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha} + v(-k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{r}_v^* = \boldsymbol{\beta},$$

$$\boldsymbol{r}_s^* \times \boldsymbol{r}_v^* = (1 - vk)\boldsymbol{\gamma} - v\tau\boldsymbol{\alpha}.$$

因为曲线 C 为曲面 Σ 上的一条参数曲线 ($v = 0$), 故沿曲线 C, 曲面 Σ 的单位法向量 $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{r}_s^* \times \boldsymbol{r}_v^* \parallel \boldsymbol{\gamma}$, 即 C 的密切平面与 Σ 的切平面重合, 因此 $\theta = \angle(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{\pi}{2}$. 则 $k_n = k\cos\theta = 0$ 说明 C 为 Σ 的渐近曲线。

【法 II】 我们先计算沿曲线 C 曲面 Σ 的第二类基本量.

$$\boldsymbol{r}_{ss}^*|_{v=0} = k\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{r}_{sv}^*|_{v=0} = -k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{r}_{vv}^*|_{v=0} = 0,$$

$$\boldsymbol{r}_s^* \times \boldsymbol{r}_v^*|_{v=0} = \boldsymbol{\gamma},$$

由于沿曲线C有$L=N=0$, 所以参数曲线为渐近曲线, 而C是对应$v=0$的参数曲线, 故每条曲线在它的主法线曲面上是渐近曲线. □

10. 证明在曲面$z=f(x)+g(y)$上, 曲线族$x=$常数, $y=$常数构成共扼网.

证明：将给定曲面的方程$z=f(x)+g(y)$写成参数方程即

$$\boldsymbol{r}(x,y)=\{x,y,f(x)+g(y)\},$$

则曲线族$x=$常数, $y=$常数正是曲面的曲纹坐标网.

显然有$r_{xy}=0$, 即$M=0$, 根据曲面的曲纹坐标网是共扼网的充要条件是$M=0$知曲线族$x=$常数, $y=$常数构成共扼网. □

11. 确定螺旋面$x=u\cos v, y=u\sin v, z=cv$上的曲率线.

解：先求出题中螺旋面的第一、二类基本量分别为

$$E=1,\quad F=0,\quad G=u^2+c^2;$$

$$L=0,\quad M=\frac{-c}{\sqrt{u^2+c^2}},\quad N=0.$$

于是曲率线的微分方程为

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2+c^2 \\ 0 & \frac{-c}{\sqrt{u^2+c^2}} & 0 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$-\frac{c}{\sqrt{u^2+c^2}}du^2+\frac{c(u^2+c^2)}{\sqrt{u^2+c^2}}dv^2=0,$$

或者

$$dv=\pm\frac{du}{\sqrt{u^2+c^2}},$$

积分得曲率线的参数关系式为

$$v\pm\ln(u+\sqrt{u^2+c^2})=C\,(\text{常数}).$$

□

12. 求出双曲面 $z = axy$ 上的曲率线.

解：令

$$\boldsymbol{r}(x,y) = \{x, y, axy\},$$

则直接计算可得到双曲面的第一、二类基本量分别为

$$E = \boldsymbol{r}_x^2 = 1 + a^2y^2, \quad F = \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_y = a^2xy, \quad G = \boldsymbol{r}_y^2 = 1 + a^2x^2;$$

$$L = \boldsymbol{r}_{xx} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad M = \boldsymbol{r}_{xy} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2x^2 + a^2y^2}}, \quad N = \boldsymbol{r}_{yy} \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

代入曲率线的微分方程得

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dxdy & dx^2 \\ 1 + a^2y^2 & a^2xy & 1 + a^2x^2 \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{1+a^2x^2+a^2y^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$(1 + a^2y^2)dx^2 - (1 + a^2x^2)dy^2 = 0,$$

或

$$dy = \pm\sqrt{\frac{1 + a^2y^2}{1 + a^2x^2}}dx.$$

积分得曲率线的参数关系式为

$$(ay + \sqrt{1 + a^2y^2})(ax + \sqrt{1 + a^2x^2}) = C_1,$$

$$\frac{ay + \sqrt{1 + a^2y^2}}{ax + \sqrt{1 + a^2x^2}} = C_2.$$

□

13. 求曲面 $\boldsymbol{r}(u,v) = \{\frac{a}{2}(u-v), \frac{b}{2}(u+v), \frac{uv}{2}\}$ 上曲率线的方程.

解：容易求出曲面的第一、二类基本量分别为

$$E = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + v^2), \quad F = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 + uv), \quad G = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + u^2);$$

$$L = N = 0, \quad M = \frac{ab}{\sqrt{b^2(u-v)^2 + a^2(u+v)^2 + 4a^2b^2}}.$$

将上述结果代入曲率线的微分方程

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

可得

$$Edu^2 - Gdv^2 = 0.$$

将上式因式分解, 有

$$(\sqrt{E}du + \sqrt{G}dv)(\sqrt{E}du - \sqrt{G}dv) = 0.$$

(1) 当 $\sqrt{E}du + \sqrt{G}dv = 0$ 时, 利用第一类基本量, 有

$$\frac{du}{\sqrt{a^2+b^2+u^2}} + \frac{dv}{\sqrt{a^2+b^2+v^2}} = 0,$$

两端积分, 得

$$\ln(u + \sqrt{a^2+b^2+u^2}) + \ln(v + \sqrt{a^2+b^2+v^2}) = \ln C_1,$$

那末

$$(u + \sqrt{a^2+b^2+u^2})(v + \sqrt{u^2+b^2+v^2}) = C_1$$

是一族曲率线, 这里 C_1 是正常数.

(2) 当 $\sqrt{E}du - \sqrt{G}dv = 0$ 时, 类似地有另一族曲率线

$$\frac{u + \sqrt{a^2+b^2+u^2}}{v + \sqrt{a^2+b^2+v^2}} = C_2,$$

这里 C_2 也是正常数. □

14. 给出曲面上一条曲率线 Γ, 设 Γ 上每一点处的副法向量和曲面在该点处的法向量成定角, 求证 Γ 是一平面曲线.

证明: 设曲线 Γ 的自然参数方程 $u = u(s), v = v(s)$ 为, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 是其基本向量, 则

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \cos\theta = C(\text{常数}), \tag{14.1}$$

(1) 若(14.1)式中常数$C = 1$或-1, 即$\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{\gamma}$, 这时曲线$C$为渐近曲线, 沿曲线$C$, 法曲率$k_n = 0$. 因为$C$是曲率线, 根据Rodrigues公式知$d\boldsymbol{n} = -k_n d\boldsymbol{r}$, 沿曲线$C$, 曲面的法向量为常向量, 进而曲线的副法向量为常向量, 即C是平面曲线.

(2) 若(14.1)式中常数$C \neq \pm 1$, 对(14.1)式两边关于弧长s求导, 并利用Frenet公式和Rodrigues公式, 得

$$\tau \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0,$$

而$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \neq 0$(否则由$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$知$\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{\gamma}$), 所以$\tau = 0$, 即曲率线$\Gamma$为平面曲线. □

15. 如果一曲面的曲率线(非渐近曲线)的密切平面与曲面的切平面交成定角, 则它是平面曲线.

证明： 设曲率线的弧长参数方程为$r = r(s), \alpha, \beta, \gamma$分别为其切向量, 主法向量和副法向量, 并设沿曲率线曲面的切平面的单位法向量n与β之间的夹角为θ, 不妨设$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 如果$\beta, n$之间的夹角大于$\frac{\pi}{2}$, 代替$n$, 取$-n$作为曲面的单位法向量, 这时, $\beta, -n$之间的夹角就小于$\frac{\pi}{2}$. n与γ之间的夹角为$\frac{\pi}{2} - \theta$或$\frac{\pi}{2} + \theta$, 依题意$\frac{\pi}{2} - \theta$或$\frac{\pi}{2} + \theta$为定角, 则θ为定角. 由于

$$n \cdot \gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

或等于$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$. 上式两边关于$s$求导, 得

$$\frac{d\gamma}{ds} \cdot n + \gamma \cdot \frac{dn}{ds} = 0.$$

由于$r = r(s)$为曲率线, 由Rodrigues公式, $\frac{dn}{ds}$平行于$\frac{dr}{ds}$, 于是有

$$\gamma \cdot \frac{dn}{ds} = 0.$$

从而

$$\frac{d\gamma}{ds} \cdot n = 0,$$

即

$$-\tau \cos\theta = 0.$$

由于这条曲率线不是渐近线, n不平行于γ, 于是$\theta \neq \frac{\pi}{2}$, 因而$\tau = 0$, 由此知曲率线为平面曲线. □

后记: 反之, 已知曲面的一条曲率线$r = r(s)$(s为弧长)是平面曲线, 那末沿这条曲率线, γ是常向量,由于沿曲率线$\gamma \cdot \frac{dn}{ds} = 0$, 所以$\frac{d}{ds}(\gamma \cdot n) = 0$, 这表明沿这条曲率线

$$\gamma \cdot n = \cos\theta,$$

而θ为常数, 即沿这条曲率线, 曲面的切平面与曲率线所在的平面相交于定角.

16. 求正螺面的主曲率.

解: 对于正螺面

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \{u\cos v, u\sin v, bv\},$$

其第一、二类基本量分别为

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + b^2;$$

$$L = N = 0, \quad M = \frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}}.$$

可见$E : F : G \neq L : M : N$, 由此便知正螺面上的所有点都非脐点, 于是其上每点处都有两个不相等的主曲率. 将基本量代入主曲率k_N的计算公式

$$\begin{vmatrix} L - k_N E & M - k_N F \\ M - k_N F & N - k_N G \end{vmatrix} = 0,$$

得到

$$(u^2+b^2)k_N^2 - \frac{b^2}{u^2+b^2} = 0.$$

因此, 两个主曲率分别为

$$k_1 = \frac{b}{u^2+b^2}, \quad k_2 = \frac{-b}{u^2+b^2}.$$

□

17. 确定抛物面$z = a(x^2+y^2)$在$(0,0)$点的主曲率.

解： 首先直接计算得到抛物面在点 $(0,0)$ 处的第一、二类基本量分别为

$$E=G=1,\quad F=0;$$

$$L=N=2a,\quad M=0.$$

由 $F=M=0$ 知, 参数曲线网是曲率线网, 于是主曲率分别为

$$k_1=\frac{L}{E}=2a,\quad k_2=\frac{N}{G}=2a,$$

因此, 抛物面 $z=a^2(x^2+y^2)$ 在点 $(0,0)$ 的主曲率 $k_1=k_2=2a$. 事实上, $(0,0)$ 点是抛物面的脐点, 在该点, 沿所有方向的法曲率都相等, 且为 $2a$. □

18. 证明在曲面上给定点处, 沿相互成为直角的方向的法曲率之和为常数.

证明： 设曲面上给定点处的两个主曲率分别为 k_1 和 k_2, $d\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\boldsymbol{r}$ 为给定点处任意两个相互成为直角的方向, 对应的法曲率分别为 k_n 和 k_n^*, 则由 Euler 公式有

$$\begin{aligned}k_n&=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta,\\ k_n^*&=k_1\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)+k_2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)\\ &=k_1\sin^2\theta+k_2\cos^2\theta.\end{aligned}$$

其中 θ 为方向 $d\boldsymbol{r}$ 和 $u-$ 曲线之间的夹角, 显然有

$$k_n+k_n^*=k_1+k_2=C\,(\text{给定点处为常数}).$$

□

19. 证明若曲面的两族渐近曲线交于定角, 则主曲率之比为一常数.

证法 I： 因为沿渐近方向法曲率为 0, 根据 Euler 公式有

$$k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta=0,$$

其中 θ 为渐近曲线和 $u-$ 曲线的夹角, 即两条渐近曲线夹角的一半, 由题设为常量. 因此

$$\frac{k_1}{k_2}=-\tan^2\theta=C\,(\text{常数}).$$

证法 II： 取两族渐近曲线作为曲面的参数曲线(这相当于对曲面施行参数变换), 于是 $L=N=0$, 但 $M\neq 0$(否则, 曲面上有平点, 在平点处任意方向都是渐近方向, 与题设不符). 由题设, 渐近曲线交于定角, 因此

$$\cos\theta=\frac{F}{\sqrt{EG}}=a(\text{常数}),$$

将 $L=N=0$ 代入主曲率的方程, 直接计算得到两个主曲率之比为

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{F-\sqrt{EG}}{F+\sqrt{EG}}=\frac{a-1}{a+1}(\text{常数}).$$

证法 III： 取参数曲线网为渐近线网, 则 $L=N=0$. 于是 $-\frac{K}{H^2}=\frac{EG}{F^2}-1$, 且渐近线的夹角 ϕ 的余弦为 $\cos\phi=\frac{F}{\sqrt{EG}}$. 因此

$$-\frac{K}{H^2}=\frac{1}{\cos^2\phi}-1=\tan^2\phi=\left(\frac{2\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}\right)^2.$$

另一方面

$$-\frac{K}{H^2}=-\frac{k_1\cdot k_2}{\left[\frac{1}{2}(k_1+k_2)\right]^2}.$$

所以

$$-\frac{k_1\cdot k_2}{\left[\frac{1}{2}(k_1+k_2)\right]^2}=\left(\frac{2\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}\right)^2,$$

整理得到 $\frac{k_1}{k_2}=-\tan^2\frac{\phi}{2}$ (常值). □

20. 求证正螺面的平均曲率为零.

证明： 对于正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,bv\}$, 由第16题知它的两个主曲率分别为 $k_{1,2}=\pm\frac{b}{u^2+b^2}$. 从而, 平均曲率 $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0$. □

21. 计算双曲面 $z=axy$ 在点 $x=y=0$ 处的平均曲率和高斯曲率.

解： 首先可求出双曲面 $z=axy$ 在点 $x=y=0$ 处的第一、二类基本量分别为 (见第12题的结果) $E=G=1,\ F=0;\ L=N=0,\ M=a$. 将这些基本量代入主曲率 k_N 的方程

$$\begin{vmatrix} L-k_NE & M-k_NF \\ M-k_NF & N-k_NG \end{vmatrix}=0,$$

得

$$k_N^2 - a^2 = 0.$$

于是, 两个主曲率为 $k_{1,2} = \pm a$, 平均曲率和高斯曲率分别为

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0,$$
$$K = k_1 \cdot k_2 = -a^2.$$

□

22. 证明极小曲面上的点都是双曲点或平点.

证明：对于极小曲面, 有 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$, 即 $k_1 = -k_2$.

(1) 若 $k_1 = -k_2 = 0$, 则所有法曲率为零, 即 $L = M = N = 0$, 这时曲面上的点都是平点.

(2) 若 $k_1 = -k_2 \neq 0$, 则 $k_1 k_2 = -k_1^2 < 0$, 即 $LN - M^2 < 0$, 这时曲面上的点都是双曲点. □

23. 求证如果曲面上的平均曲率为零, 则渐近网构成正交网.

证法 I：由 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$, 得 $k_1 = -k_2$, 又沿渐近方向有 $k_n = 0$, 从而 $k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = 0$, 于是 $\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{-k_1}{k_2}} = \pm 1$. 则 $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ 或 $2\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, 而 2θ 正为渐近曲线的夹角, 所以渐近曲线正交.

证法 II：设渐近网在每点对应的两个渐近方向为 $du : dv$, $\delta u : \delta v$, 则

$$\begin{cases} \frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v} = -\frac{2M}{L}, \\ \frac{du}{dv} \cdot \frac{\delta u}{\delta v} = \frac{N}{L}. \end{cases} \tag{23.1}$$

若 $L = N = 0$, 则参数曲线网为渐近线网, 而且由 $H = 0$ 得 $FM = 0$, 由于 $M \neq 0$(否则出现平点), 从而 $F = 0$, 即渐近线网正交.

现设 $L \neq 0$, 则由 $H = 0$ 得 $E\frac{N}{L} - F\frac{2M}{L} + G = 0$, 将 (23.1) 式代入得

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0,$$

此即两渐近方向 $du : dv$ 和 $\delta u : \delta v$ 正交, 也即渐近线网正交. □

24. 在 xoz 平面上取圆周 $y=0,(x-b)^2+z^2=a^2(b>a)$, 并令其绕 z 轴旋转所生成的曲面称为圆环面, 圆环面的参数方程为

$$\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)=\{(b+a\cos\varphi)\cos\theta,(b+a\cos\varphi)\sin\theta,a\sin\varphi\},$$

其中 $0\leq\varphi<2\pi,0\leq\theta<2\pi$. 求圆环面上的椭圆点、双曲点和抛物点.

解: 直接计算可求出

$$E=a^2,\quad F=0,\quad G=(b+a\cos\varphi)^2,$$

$$L=a,\quad M=0,\quad N=\cos\varphi(b+a\cos\varphi),$$

$$LN-M^2=a\cos\varphi(b+a\cos\varphi).$$

若 $LN-M^2>0$, 即 $\cos\varphi>0$, 则 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{3}{2}\pi<\varphi<2\pi$ 为椭圆点;
若 $LN-M^2<0$, 即 $\cos\varphi<0$, 则 $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ 为双曲点;
若 $LN-M^2=0$, 即 $\cos\varphi=0$, 则 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 或 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ 为抛物点. □

25. 若曲面的第一基本型表示为 $I=\lambda^2(u,v)(du^2+dv^2)$ 的形式, 则称该曲面的坐标曲线网为等温网. 试证: 旋转曲面 $r=\{g(t)\cos\theta,g(t)\sin\theta,f(t)\}$ 上存在等温网.

证明:

26. (约阿希姆施塔耳[Joachimsthal] 定理) 若两曲面 S_1 和 S_2 交于一条曲线 C, 而且 C 是 S_1 的一条曲率线, 则 C 也是 S_2 的曲率线的充要条件是 S_1,S_2 沿着 C 相交成固定角.

证明: $\Longleftarrow$) 令 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{N}$ 分别表示 S_1 与 S_2 沿着 C 的单位法向量, 则由题设

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}=\text{ 常数}.$$

上式两边取微分得

$$d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{N}=0,$$

因交线 C 是 S_1 的曲率线, 由罗德里克 (Rodrigues) 公式, 沿 C 有

$$-k_n d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{N}=0,$$

但 $d\boldsymbol{r}$ 是 C 的切方向, 所以 $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{N}=0$, 故 $\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{N}=0$. 又因为 $\boldsymbol{N}^2=1$, $\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{N}=0$, 于是得到 $d\boldsymbol{N}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{N}$, 所以 $d\boldsymbol{N}\parallel d\boldsymbol{r}$, 即 $d\boldsymbol{N}=-\lambda d\boldsymbol{r}$, 由 Rodrigues 公式知 Γ 是 S_2 的曲率线.

$\Longrightarrow$) 沿用充分性证明中的记号, 我们只要证明 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}=\cos\theta=$ (常数) 即可. 事实上, 因为 C 是 S_1 和 S_2 的曲率线, 则有

$$d\boldsymbol{n}=-k_n d\boldsymbol{r},\quad d\boldsymbol{N}=-k_N d\boldsymbol{r}.$$

于是 $d(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N})=0$, 从而 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}=$ 常值. □

27. (贝尔特腊米[Beltrami] - 恩内佩尔定理) 证明在曲面 S 上一双曲点 P 处, 若两条渐近曲线都不是直线, 则它们之中一条在 P 点处的挠率是 $\sqrt{-K}$, 另一条在 P 点处的挠率是 $-\sqrt{-K}$, 其中 K 是 S 在 P 点处的高斯曲率.

证法 I: 设曲面 S 的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, 我们首先来考察 S 上的一条异与直线的渐近曲线 $\Gamma: u=u(s), v=v(s)$ 的挠率, 其中 s 为弧长参数. 在挠率的一般公式 $\tau=-\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ 中, 取 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}$, 就得

$$\tau=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\dot{\boldsymbol{\gamma}}).$$

对于渐近曲线 Γ, 可以令 $\boldsymbol{\gamma}=\pm\boldsymbol{n}$ (这里 $\boldsymbol{n}$ 为曲面沿 Γ 的单位法矢), 再把 $\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{r}}$ 代入得

$$\tau=(\dot{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{n}}).$$

注意到 $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$ 就可以把上述公式写成

$$\tau=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot(\dot{\boldsymbol{n}}\times\dot{\boldsymbol{r}}).$$

利用拉格朗日恒等式展开右边就得

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}[(\boldsymbol{r}_u\dot{\boldsymbol{n}})(\boldsymbol{r}_v\dot{\boldsymbol{r}})-(\boldsymbol{r}_u\dot{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{r}_v\dot{\boldsymbol{n}})].$$

把 $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_u\dot{u}+\boldsymbol{r}_v\dot{v}, \dot{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}_u\dot{u}+\boldsymbol{n}_v\dot{v}$ 代入化简, 就得 Γ 的挠率

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}$$

现在, 对于 S 上的双曲点 P, 有 $LN-M^2<0$, 即高斯曲率 $K<0$, 由连续性可知, 在 P 点邻近, $K<0$, 因而可以在那里取渐近曲线为参数曲线，于是 $L=N=0$, 而高斯曲率

$$K=-\frac{M^2}{EG-F^2}.$$

对于 $u-$ 线, $\dot{v}=0, ds^2=Edu^2, \dot{u}^2=\frac{1}{E}$, 故根据前面求出的挠率公式, $u-$ 线的挠率为 $\sqrt{-K}$. 同样对 $v-$ 线可知挠率是 $-\sqrt{-K}$.

证法 II： 有定理说, 曲面上一条曲线为渐近曲线的充要条件是它为一条直线, 或它在每一点的密切平面与曲面的切平面重合, 即 $\boldsymbol{\gamma}=\pm\boldsymbol{n}$, 由题设, Γ 是非直线的渐近曲线, 故 Γ 的副法向量 $\boldsymbol{\gamma}=\pm\boldsymbol{n}$. (此处 $\boldsymbol{n}$ 是曲面沿 Γ 的单位法向量). 因此

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}=\pm\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}, \quad 即\ -\tau\boldsymbol{\beta}=\pm\frac{d\boldsymbol{n}}{ds},$$

故

$$\tau^2=\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\frac{I\!I\!I}{I},$$

其中 $I, I\!I\!I$ 表示曲面的第一、三基本形式. 再由基本形式之间的线性关系知 $I\!I\!I-2HI\!I+KI=0$, 但沿渐近曲线 $I\!I=0$, 因此 $\frac{I\!I\!I}{I}=-K$, 所以 $\tau^2=-K$.
□

28. 证明如果曲面上无抛物点则它上面的点和球面像上的点是一一对应的.

证明： 设曲面 $\Sigma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),(u,v)\in\mathcal{D}$ 的球面像

$$\Sigma^*:\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}^*(u,v)=\boldsymbol{n}(u,v),$$

其中 $\boldsymbol{n}(u,v)$ 表示曲面 Σ 的单位法向量, 则

$$(\boldsymbol{r}^*)^2=1,$$

于是 $\boldsymbol{r}^*\cdot\boldsymbol{r}_u^*=\boldsymbol{r}^*\cdot\boldsymbol{r}_v^*=0$, 因而 $\boldsymbol{r}_u^*,\boldsymbol{r}_v^*$ 都与 $\boldsymbol{r}^*$ 垂直, 即 $\boldsymbol{r}_u^*\times\boldsymbol{r}_v^*$ 平行于 $\boldsymbol{r}^*$. 令

$$\boldsymbol{r}_u^*\times\boldsymbol{r}_v^*=\lambda\boldsymbol{r}^*,$$

则取两端与 $\boldsymbol{r}^*$ 的点积, 得

$$\lambda=(\boldsymbol{r}^*,\boldsymbol{r}_u^*,\boldsymbol{r}_v^*).$$

将$\boldsymbol{r}^* = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$代入, 得

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_u^* \times \boldsymbol{r}_v^*)\\ &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v)\\ &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(LN-M^2)\end{aligned}$$

于是

$$\boldsymbol{r}_u^* \times \boldsymbol{r}_v^* = \frac{LN-M^2}{\sqrt{EG-F^2}}\boldsymbol{r}^* = K\sqrt{EG-F^2}\,\boldsymbol{n}.$$

故若曲面Σ上没有抛物点, $\boldsymbol{r}_u^* \times \boldsymbol{r}_v^* \neq 0$, 在$(u,v) \in \mathcal{D}$的范围内, Σ的点和球面像的点都与uv平面上区域$\mathcal{D}$内的点一一对应, 因而Σ的点和它的球面像点一一对应. $\square$