

本书是作者们微分几何课多年教学经验之积累所成。内容为分属于四章的一百个例题，这些例题基本覆盖了大学数学系微分几何教材中重要内容，还涉及一些难度较高的著名微分几何定理的证明。

本书叙述细致、由浅入深，具有启发性，可使读者加深对微分几何基本概念的理解，提高解题能力。

本书可供数学专业、应用数学专业的大学生、教师及其他有兴趣的读者参考。

前言

微分几何是现代数学的一个重要分支。编者执教数学系微分几何课程十年，积累了一些微分几何习题。高等教育出版社约复旦大学数学研究所微分几何研究室编一本微分几何习题集，我们在导师胡和生教授的鼓励下，合作编写了这本习题集。

收入这本习题集中的微分几何习题有一百个。同种类型的习题一般只收入一二题。因此，虽然本书只有一百个题目，却基本上覆盖了大学数学系微分几何教材中重要的内容。另外，在本书中，编者也自编了少量习题。对于一些难度较高的著名的微分几何定理，本书也有涉及。

今年是导师苏步青教授九十寿辰，苏先生在微分几何领域辛勤耕耘六十余年，桃李满天下，为我国微分几何一代宗师，我们谨以此书献给苏先生，祝他健康长寿。

由于编者水平有限，书中恐有不妥之处，敬请同行指正。

编者

一九九一年六月

微分几何一百例

姜国英 黄宣国 编

高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
商务印书馆上海印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 6.25 字数 150,000
1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷

印数 00,001—4,599

ISBN 7-04-003964-8/O·1159

定价 2.95元

目 录

第一章 曲线的局部几何性质	1
§ 1 曲线的曲率、挠率与 Frenet 标架	1
§ 2 Frenet 公式的应用	8
§ 3 两条曲线间的对应	12
§ 4 夹角的可微性	19
第二章 曲线的一些整体性质	22
§ 1 卵形线和支持函数	22
§ 2 等宽曲线	28
§ 3 卵形线的顶点和平均点	32
§ 4 球面曲线的判定	36
§ 5 空间曲线多边形的全曲率	38
第三章 曲面的局部几何性质	44
§ 1 切平面	44
§ 2 包络与可展曲面	51
§ 3 曲面的基本公式与基本方程	62
§ 4 渐近曲线	70
§ 5 主曲率与曲率线	86
§ 6 测地线和测地曲率	96
§ 7 极小曲面	113
§ 8 三种特殊曲面	122
§ 9 曲面上的 Laplace 算子	136
§ 10 等距对应与保角对应	143
§ 11 曲面上向量的平行移动	150
第四章 曲面的一些整体性质	158
§ 1 Gauss 映照	158

§ 2 等宽曲面.....	161
§ 3 向量场的孤立奇点.....	165
§ 4 Gauss-Bonnet 公式	166
§ 5 有关总曲率 K 与平均曲率 H 的一些结果.....	179

第一章 曲线的局部几何性质

§ 1 曲线的曲率、挠率与 Frenet 标架

Frenet 标架和 Frenet 公式不仅是局部曲线论中最基本的内容,而且是研究曲线性质和解决具体问题的强有力的工具.因此,熟练掌握已知曲线的 Frenet 标架及其曲率与挠率的计算方法应是学习微分几何的读者必须具备的基本技能.当空间曲线是用以弧长为参数的向量形式给出时,由定义不难求出它的 Frenet 标架以及曲率和挠率.当曲线不是以弧长为参数给出时,如能求出弧长,以其作为新参数写出向量表示,那这仍然是前面的情形,不然的话计算就复杂多了.下面介绍一些曲线不是用弧长作参数给出时的例子,以期读者从中能了解到一些其他的一般处理方法.

例 1 设空间正则挠曲线 C 的向量表示为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, t 是一般参数.求 C 的 Frenet 标架.

解 将 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 对弧长 s 求导,利用复合函数求导的链式法则,我们有

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad (1)$$

再对 s 求导,

$$k\mathbf{N} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2}.$$

将上面两式的两端分别作叉积,可以得到

$$k\mathbf{B} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^3, \quad (2)$$

从而便有

$$kN - kB \times T = \left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] \left(\frac{dt}{ds} \right)^4. \quad (3)$$

注意到

$$\left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|},$$

以及一般参数下曲率 k 的计算公式

$$k(t) = \frac{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^3}, \quad (4)$$

由(1)、(2)、(3)便得到要求的 Frenet 标架为

$$T(t) = \text{sign} \left(\frac{dt}{ds} \right) \cdot \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|},$$

$$N(t) = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right| \cdot \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|},$$

$$B(t) = \text{sign} \left(\frac{dt}{ds} \right) \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|}.$$

解毕.

然而当曲线 O 的具体方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 已知时, 尽管 t 不是弧长参数, 有时并不一定要直接代例 1 中得到的公式去求它的 Frenet 标架, 那样太烦, 通常的做法是边计算, 边利用有关的几何性质进行化简、推理, 比如, 我们来看下面的例题.

例 2 已知曲线 $O: \mathbf{r}(t) = (4a \cos^3 t, 4a \sin^3 t, 3b \cos 2t)$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, a 和 b 是正常数. 求 O 的曲率 k 、挠率 τ 及 Frenet 标架.

解 一般总假定参数 t 增加的方向为曲线的正向, 从而

$$\frac{ds}{dt} > 0.$$

将 O 的向量表示关于弧长 s 求导, 我们有

$$\begin{aligned} T &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= (-12a \cos^2 t \sin t, 12a \sin^2 t \cos t, -6b \sin 2t) \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= 6 \sin 2t (-a \cos t, a \sin t, -b) \cdot \frac{dt}{ds}. \end{aligned}$$

利用 $|T| = 1$, 得到

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{6 \sin 2t \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (1)$$

从而

$$T(t) = \frac{(-a \cos t, a \sin t, -b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2)$$

将上式对弧长 s 求导, 利用 Frenet 公式和已得的(1)式便有

$$\begin{aligned} kN &= \frac{(a \sin t, a \cos t, 0) \cdot \frac{dt}{ds}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{a}{6(a^2 + b^2) \sin 2t} (\sin t, \cos t, 0). \end{aligned}$$

$$\text{由此可得 } k(t) = |k(t)N(t)| = \frac{a}{6(a^2 + b^2) \sin 2t},$$

且有

$$N(t) = (\sin t, \cos t, 0). \quad (3)$$

因此,

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{(b \cos t, -b \sin t, -a)}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4)$$

将上式再关于弧长 s 求导, 并利用(1), 我们有

$$\begin{aligned} -\tau N &= \frac{(-b \sin t, -b \cos t, 0) \cdot \frac{dt}{ds}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= -\frac{b}{6(a^2 + b^2) \sin 2t} (\sin t, \cos t, 0). \end{aligned}$$

注意到(3), 比较上式左右两端, 即得

$$\tau(t) = \frac{b}{6(a^2 + b^2) \sin 2t}.$$

解毕.

在实际问题中, 有不少曲线是以两个曲面交线的形式给出的,

这时其曲率与挠率的计算方法可参考下面的例题。

例3 设曲线 O 是如下两个二次曲面的交线。

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1, \quad \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = 1$$

的交线。求曲线 O 的曲率 k 与挠率 τ 。

解 为方便起见, 如果记

$$F(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1,$$

$$G(x, y, z) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 - 1,$$

则沿两曲面的交线 O , 下列的积向量

$$\nabla F \times \nabla G = 4((\beta\nu - \gamma\mu)yz, (\gamma\lambda - \alpha\nu)zx, (\alpha\mu - \beta\lambda)xy)$$

就应与 O 的切方向平行。因此, 若记常数

$$a = \beta\nu - \gamma\mu, \quad b = \gamma\lambda - \alpha\nu, \quad c = \alpha\mu - \beta\lambda,$$

便可设 O 的单位切向量 $T = (x', y', z')$ 满足

$$\begin{aligned} eT &= \frac{1}{xyz} (axyz, bzx, cxy) \\ &= \left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

式中的 e 满足

$$e^2 = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}.$$

将(1)式的两边关于弧长 s 求导, 注意到 T 的定义, 可得

$$\begin{aligned} e'T + eT' &= \left(-\frac{a}{x^2} \cdot x', -\frac{b}{y^2} \cdot y', -\frac{c}{z^2} \cdot z' \right) \\ &= -\frac{1}{e} \left(\frac{a^2}{x^3}, \frac{b^2}{y^3}, \frac{c^2}{z^3} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

如果将(1)、(2)的两端分别作外积, 我们有

$$e^3 k B = - \left(\frac{bc^2}{y^2 z^3} - \frac{b^2 c}{y^3 z^2}, \frac{ca^2}{zx^3} - \frac{c^2 a}{z^3 x}, \frac{ab^2}{xy^3} - \frac{a^2 b}{x^3 y} \right). \quad (3)$$

注意到 O 同时在两个二次曲面上, 于是

$$\begin{aligned} \frac{bc^2}{y^2 z^3} - \frac{b^2 c}{y^3 z^2} &= \frac{b^2 c}{y^3 z^3} (\alpha y^2 - b z^2) \\ &= \frac{b^2 c}{y^3 z^3} [(\alpha\mu - \beta\lambda)y^2 - (\gamma\lambda - \alpha\nu)z^2] \\ &= \frac{b^2 c}{y^3 z^3} [\alpha(\mu y^2 + \nu z^2) - \lambda(\beta y^2 + \gamma z^2)] \\ &= \frac{b^2 c}{y^3 z^3} [\alpha(1 - \lambda x^2) - \lambda(1 - \alpha x^2)] \\ &= \frac{b^2 c}{y^3 z^3} (\alpha - \lambda), \end{aligned}$$

类似地可以得到

$$\begin{aligned} \frac{ca^2}{zx^3} - \frac{c^2 a}{z^3 x} &= \frac{ca}{x^3} (\beta - \mu), \\ \frac{ab^2}{xy^3} - \frac{a^2 b}{x^3 y} &= \frac{ab}{x^3 y} (\gamma - \nu). \end{aligned}$$

因而(3)式便化为

$$\begin{aligned} -e^3 k B &= \frac{abc}{x^3 y^3 z^3} \left(\frac{\alpha - \lambda}{a} x^3, \frac{\beta - \mu}{b} y^3, \frac{\gamma - \nu}{c} z^3 \right). \\ \text{为便于计算, 我们把上式再改写为} \\ -e^3 k \frac{xy^3 z^3}{abc} B &= \left(\frac{\alpha - \lambda}{a} x^3, \frac{\beta - \mu}{b} y^3, \frac{\gamma - \nu}{c} z^3 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

将(4)的两边对弧长 s 求导, 并利用(1), 我们有

$$\begin{aligned} - \left(e^3 k \frac{xy^3 z^3}{abc} \right)' B + e^3 k \frac{xy^3 z^3}{abc} N \\ = 3 \left(\frac{\alpha - \lambda}{a} x^2 x', \frac{\beta - \mu}{b} y^2 y', \frac{\gamma - \nu}{c} z^2 z' \right) \\ = \frac{3}{e} ((\alpha - \lambda)x, (\beta - \mu)y, (\gamma - \nu)z). \end{aligned} \quad (5)$$

现在已能求出所要的曲率 k 与挠率 τ . 利用(4), 注意到 e^2 的表达式, 我们得到

$$k = \frac{\left| \frac{abc}{x^3 y^3 z^3} \left[\left(\frac{\alpha - \lambda}{a} \right)^2 x^6 + \left(\frac{\beta - \mu}{b} \right)^2 y^6 + \left(\frac{\gamma - \nu}{c} \right)^2 z^6 \right]^{\frac{1}{2}} \right|}{\left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6)$$

至于挠率 τ , 如将 (2)、(5) 的两端分别作内积, 我们有

$$\tau^2 k^2 \frac{x^3 y^3 z^3}{abc} = -\frac{3}{\sigma^3} \left(\frac{a^2(\alpha-\lambda)}{x^2} + \frac{b^2(\beta-\mu)}{y^2} + \frac{c^2(\gamma-\nu)}{z^2} \right),$$

因此,

$$\tau = -3 \cdot \frac{x^3 y^3 z^3}{abc} \cdot \frac{\frac{a^2(\alpha-\lambda)}{x^2} + \frac{b^2(\beta-\mu)}{y^2} + \frac{c^2(\gamma-\nu)}{z^2}}{\left(\frac{\alpha-\lambda}{a} \right)^2 x^6 + \left(\frac{\beta-\mu}{b} \right)^2 y^6 + \left(\frac{\gamma-\nu}{c} \right)^2 z^6}. \quad (7)$$

自然, (6)、(7) 中的 x, y, z 应是交线 O 上所论点的坐标。

顺便提一句, 这时利用 (1)、(4) 和 $N = B \times T$ 已不难写出交线 O 的 Frenet 标架, 这里就不赘述了。解毕。

例 4 设 O 是空间正则挠曲线, 试求它从法线的球面标线的曲率和挠率。

解 如果设 $O: r = r(s)$, s 为弧长, 则其从法线的球面标线 O_1 就有表示 $r_1 = B(s)$, 这里的 s 是 O_1 的参数。将 O_1 的向量表示对其弧长 s_1 求导, 我们有

$$T_1 = -\tau N \frac{ds}{ds_1}.$$

因此得到

$$\left| \frac{ds_1}{ds} \right| = |\tau|, \quad T_1 = \varepsilon N \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

将所得的第二式再对 s_1 求导,

$$k_1 N_1 = \varepsilon (-kT + \tau B) \frac{ds}{ds_1}.$$

于是

$$k_1^2 = \frac{k^2 + \tau^2}{\tau^2}.$$

由于 O_1 落在单位球面上, 如果 O_1 的挠率 $\tau_1 = 0$, 则 O_1 就是圆

弧, 这时 $k_1 = \text{const}$, 利用 (1) 即知, 原来的曲线 O 便是一般螺线。因而若 O 不是一般螺线, 则其从法线的球面标线 O_1 的曲率 k_1 与挠率 τ_1 均不为零, 于是作为球面曲线的 O_1 就有如下的分解式

$$r_1 = -\rho_1 N_1 - \frac{d\rho_1}{ds_1} \cdot \sigma_1 B_1,$$

$$= -\frac{1}{k_1} N_1 - \frac{d}{ds_1} \left(\frac{1}{k_1} \right) \cdot \frac{1}{\tau_1} B_1.$$

因此,

$$\left(\frac{1}{k_1} \right)^2 + \left[\frac{d}{ds_1} \left(\frac{1}{k_1} \right) \cdot \frac{1}{\tau_1} \right]^2 = 1,$$

由此解得

$$\tau_1^2 = -\frac{\left(\frac{dk_1}{ds_1} \right)^2}{k_1^2 (k_1^2 - 1)}. \quad (2)$$

但从 (1) 式可以推得

$$k_1 \frac{dk_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \left(\frac{k}{\tau} \right) \left(\frac{k}{\tau} \right)',$$

从而

$$\left(k_1 \frac{dk_1}{ds_1} \right)^2 = \left(\frac{k}{\tau} \cdot \frac{k' \tau - k \tau'}{\tau^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\tau^2} = \frac{k^2}{\tau^6} (k' \tau - k \tau')^2.$$

因此 (2) 式化为

$$\tau_1^2 = \frac{\left(k_1 \frac{dk_1}{ds_1} \right)^2}{k_1^4 (k_1^2 - 1)} = \left[\frac{k' \tau - k \tau'}{\tau (k^2 + \tau^2)} \right]^2. \quad (3)$$

于是, 根据 (1)、(3) 即得所求的曲率与挠率分别为

$$k_1 = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{|\tau|}, \quad \tau_1 = \pm \left| \frac{k' \tau - k \tau'}{\tau (k^2 + \tau^2)} \right|. \quad \text{解毕.}$$

注 (2) 式揭示了单位球面上曲线的曲率与挠率之间的一个联系。对于曲线切线的球面标线与主法线的球面标线, 也可用与本题类似的方法求出它们的曲率与挠率。

§ 2 Frenet 公式的应用

在局部曲线论中,有一大类习题是属于应用 Frenet 公式的常规练习.它们的共同点是先将所给的几何条件表达成解析式子,再利用 Frenet 公式对所归结的式子进行一定次数的微积分运算(主要是微分),同时进行适当的处理,然后分析得到的各个结果,逐一找出它们的几何内涵,引出所要的结论.下面举例说明之.

例 5 设空间正则挠曲线 O 非一般螺线. 证明: O 的主法向量与一固定方向成定角的充分必要条件是 O 的曲率 k 与挠率 τ 满足等式

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{k^2 + \tau^2}{k \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right)} \right) + \tau = 0. \quad (1)$$

证明 先证必要性. 设 e 为所述的固定单位方向, 则

$$e \cdot N = \cos \theta = \text{const.} \quad (2)$$

上式两端对弧长 s 求导, 有

$$e \cdot \left(-kT + \tau B \right) = 0,$$

或改写为

$$e \cdot T = \frac{\tau}{k} e \cdot B. \quad (3)$$

将 (3) 式两端继续对 s 求导,

$$k e \cdot N = \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right) e \cdot B - \frac{\tau^2}{k} e \cdot N.$$

利用 (2) 整理上式, 并注意到 O 非一般螺线, 即

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right) \neq 0,$$

可以得到

$$e \cdot B = - \frac{k^2 + \tau^2}{k \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right)} \cos \theta, \quad (4)$$

将上式再对 s 求导,

$$-e \cdot N = - \frac{d}{ds} \left(\frac{k^2 + \tau^2}{k \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right)} \right) \cos \theta. \quad (5)$$

由于现在 $e \cdot N = \cos \theta \neq 0$, 不然的话, 对 $(e \cdot T)' = k e \cdot N = 0$ 积分会得到 $e \cdot T = \text{const}$, 即 O 为一般螺线的矛盾结论, 所以可从 (5) 式中约去因子 $\cos \theta$, 这样便得到要证的结果.

接下来证明条件的充分性. 受必要性证明中 (2)、(3)、(4) 式的启发, 我们先令

$$e = \frac{\tau}{k} \left(\frac{k^2 + \tau^2}{k \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right)} \right) \cos \theta T + \cos \theta N + \frac{k^2 + \tau^2}{k \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right)} \cos \theta B,$$

式中的 $\cos \theta$ 是绝对值不大于 1 的非零常数, 确切的数值以后决定. 这时由于 (1) 式成立, 利用 Frenet 公式可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{e}{\cos \theta} \right) &= \left[\frac{k^2 + \tau^2}{k} + \frac{\tau}{k} \frac{d}{ds} \left(\frac{k^2 + \tau^2}{k \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right)} \right) \right] T \\ &\quad + \frac{\tau}{k} \left(\frac{k^2 + \tau^2}{k \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right)} \right) k N - k T + \tau B \\ &\quad + \frac{d}{ds} \left(\frac{k^2 + \tau^2}{k \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right)} \right) B - \frac{k^2 + \tau^2}{k \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{k} \right)} \cdot \tau N \\ &= -0, \end{aligned}$$

即 $\frac{e}{\cos \theta}$ 为常向量, 且显然有非零的常值模, 因此 $\cos \theta$ 只要取成是它的单位化因子即可. 这时, O 的主法向量 N 与固定的单位方向 e 就交定角. 证毕.

注 如所知, 切向量与一固定方向成定角的曲线是一般螺线.

类似可证, 曲线的从法向量与一固定方向成定角的充要条件仍是此曲线为一般螺线.

例 6 设 O 是空间正则挠曲线, 曲率 $k \neq 0$ 常数, Γ 是 O 的密切圆圆心轨迹. 证明: Γ 在每一点的法平面恰好平分对应的 O 的密切球在对应点的半径.

证明 如设 O 的向量表示为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, s 为弧长, 则对应的密切圆圆心轨迹 Γ 有表示

$$\Gamma: m_O = \mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s),$$

这里的 $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$ 是 O 的曲率半径. 由于 Γ 的切方向

$$\frac{dm_O}{ds} = \mathbf{T} + \rho' \mathbf{N} + \rho(-k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) = \rho' \mathbf{N} + \rho\tau \mathbf{B},$$

所以 Γ 在每一点 $m_O(s)$ 的法平面 π 的方程就是

$$(\mathbf{R} - m_O(s)) \cdot (\rho'(s)\mathbf{N}(s) + \rho(s)\tau(s)\mathbf{B}(s)) = 0, \quad (1)$$

式中的 $\mathbf{R}$ 是 π 上动点的向量表示.

而曲线 O 在对应点的密切球球心应是

$$m_s(s) = \mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s) + \rho'(s)\sigma(s)\mathbf{B}(s),$$

其中的 $\sigma(s) = \frac{1}{\tau(s)}$ 是 O 的挠率半径. 于是此密切球在 O 的对应点 $\mathbf{r}(s)$ 的半径中点便有表示

$$\frac{1}{2}(\mathbf{r}(s) + m_s(s)) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{2}(\rho(s)\mathbf{N}(s) + \rho'(s)\sigma(s)\mathbf{B}(s)).$$

若以 $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}(s) + m_s(s))$ 代入平面 π 方程 (1) 的左端, 我们有

$$\frac{1}{2}(\rho'\sigma\mathbf{B} - \rho\mathbf{N})(\rho'\mathbf{N} + \rho\tau\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\rho'\rho - \rho\rho') = 0,$$

因此所论半径的中点确实在平面 π 上. 另外, 从 O 的曲率 $k(s) \neq 0$ 常数知, $\mathbf{r}(s)$ (或 $m_s(s)$) 不落在平面 π 上, 从而这条半径 $\mathbf{r}(s) - m_s(s)$ 与 π 也就只交于一点, 即它的中点. 证毕.

例 7 已知平面曲线弧 $\widehat{AB}$. 假设按从 B 到 A 的方向, 该曲线的曲率半径是单调减少的, 试证明: 点 A 的密切圆必定全部包含在点 B 的密切圆内.

证明 取直角坐标系如图所示: 原点 O 为点 B 所对应的曲率

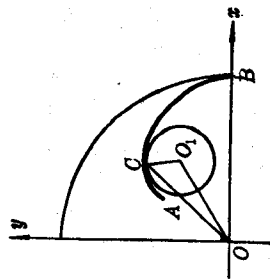
中心, $\overrightarrow{OB}$ 为 x 轴的正方向. $\forall OQ \in \widehat{AB}$, 设 O 点的曲率中心为 O_1 , 那么只要能够

证明

$$\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1Q} \leq \overrightarrow{OB},$$

我们就有 O 点的密切圆全部包含在 B 点的密切圆中的结论, 这是因为 O 点密切圆上任何一点到 O 的距离不超过 $\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1Q}$ 之故.

图 1



将 $\widehat{AB}$ 的正定向规定为由 B 到 A 的方向, 取弧长 s 为参数, 并令 $s=0$ 对应于 B 点, O 点对应的参数为 s , 则对于 $\widehat{AB}$ 的向量表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 利用平面曲线的 Frenet 公式我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0) &= \int_0^s \mathbf{r}'(s) ds = \int_0^s \mathbf{T}(s) ds \\ &= - \int_0^s \rho(s) \mathbf{N}'(s) ds \\ &= - \rho(s) \mathbf{N}(s) \Big|_0^s + \int_0^s \rho'(s) \mathbf{N}(s) ds. \end{aligned}$$

从而

$$\mathbf{r}(s) + \rho(s) \mathbf{N}(s) = \mathbf{r}(0) + \rho(0) \mathbf{N}(0) + \int_0^s \rho'(s) \mathbf{N}(s) ds,$$

这就是

$$\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO} + \int_0^s \rho'(s) \mathbf{N}(s) ds.$$

注意到曲率半径单调减少, 即 $\rho'(s) \leq 0$, 由上式得到

$$\overrightarrow{OO_1} = |\overrightarrow{OO_1}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO_1}| = \left| \int_0^s \rho'(s) N(s) ds \right|$$

$$< \int_0^s |\rho'(s)| ds = - \int_0^s \rho'(s) ds = \rho(0) - \rho(s),$$

或改写成

$$\overrightarrow{OO_1} + \rho(s) \leq \rho(0),$$

这正是要证的 $\overrightarrow{OO_1} + O_1O \leq \overrightarrow{OB}$ 证毕.

例 8 设 $O: r=r(s)$ 是球面 S^2 上的正则闭曲线, 这里的 s 是弧长. 如果 $k(s), \tau(s)$ 分别为 O 的曲率、挠率, 则成立

$$\int_0^s \frac{\tau(s)}{k(s)} ds = 0.$$

证明 不妨设 S^2 的球心为原点, 半径为 R , 并设 O 的周长为 L , 于是

$$r(s) \cdot r(s) = R^2.$$

将上式对弧长 s 求两次导数, 利用 Frenet 公式使得

$$1 + k(s)r(s) \cdot N(s) = 0.$$

因此 O 的曲率 $k(s) \neq 0$, 我们把上式改写成

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = -\tau(s)r(s) \cdot N(s) = r(s) \cdot B'(s),$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\tau(s)}{k(s)} ds &= \int_0^L r(s) \cdot B'(s) ds \\ &= r(s) B(s) \Big|_0^L - \int_0^L B(s) \cdot T(s) ds \\ &= r(L) B(L) - r(0) B(0) = 0, \end{aligned}$$

最后的等式是因为 O 是闭曲线的缘故. 证毕.

§ 3 两条曲线间的对应

局部曲线论中常见的另一类习题是关于两条曲线之间可建立

某种点对应的问题, 这种对应一般总是理解成双方均为一一的连续可微对应. 在这种对应下, 往往还假定对应点处的某些几何对象满足一定的几何条件, 这时就应分别不同的情况列出相应的解析表达式, 然后再利用 Frenet 公式对之进行微积分加工处理, 以获得所要的信息. 试比较以下的两个例题.

例 9 设两条挠曲线 O, O_1 之间可建立点对应, 在对应点的切线与 O_1 的从法线平行. 试证明: 在对应点

(i) O 的从法线与 O_1 的切线平行;

(ii) O, O_1 的主法线平行;

(iii) O, O_1 的曲率和挠率满足关系式 $kh_1 \pm \tau\tau_1 = 0$.

证明 题中所给的条件是 $B_1 \parallel T$, 但这种表达式不适宜进行微积分处理, 我们把它改写为

$$B_1 = \varepsilon T \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (1)$$

将(1)的两边对 O 的弧长 s 求导,

$$-\tau_1 \frac{ds_1}{ds} N_1 = \varepsilon k N. \quad (2)$$

由于 O, O_1 的曲率与挠率均非零, 所以根据上式可假设

$$N_1 = \eta N, \quad (\eta = \pm 1). \quad (3)$$

而(1)、(3)两式便给出

$$T_1 = -\varepsilon \eta B. \quad (4)$$

这样一来(4)、(3)两式就已经分别说明结论(i)、(ii)成立.

将(4)式两端分别对 O 的弧长 s 求导, 我们有

$$h_1 \frac{ds_1}{ds} N_1 = \varepsilon \eta \tau N. \quad (5)$$

注意到(3)式, 现在(2)和(5)就分别给出

$$\tau_1 \frac{ds_1}{ds} = -\varepsilon \eta h,$$

$$k_1 \frac{ds_1}{ds} = s\tau.$$

将所得的两式消去 $\frac{ds_1}{ds}$, 最后就得到要证的结论 (iii)

$$k k_1 \pm \tau \tau_1 = 0.$$

证毕.

例 10 设两条曲线 O, O_1 的点之间可建立对应, 在对应点, O 的主法线与 O_1 的从法线重合, 则 O 的曲率和挠率满足关系式 $k = \lambda(k^2 + \tau^2)$, 其中 λ 为常数.

证明 这时除了与例 9 类似我们能写出

$$B_1 = sN, \quad (s = \pm 1) \quad (1)$$

这个条件以外, 由于 O 的主法线与 O_1 的从法线重合, O_1 上的点就落在 O 的对应点的主法线上, 或等价地, O 上的点便落在 O_1 的对应点的从法线上. 如果把 O 的弧长 s 取成表示 O_1 上对应点的参数, 则我们就能把所述的第二个条件写成如下等式

$$\tau_1(s) = \tau(s) + \lambda(s)N(s), \quad (2)$$

式中的 τ, τ_1 分别是 O, O_1 的向量表示, $\lambda(s)$ 则是适当的可微函数.

将 (2) 式两端对 O 的弧长 s 求导, 我们有

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = T + \lambda' N + \lambda(-kT + \tau B). \quad (3)$$

利用 (1), 如在上式两端点乘 N , 即得

$$\lambda'(s) = 0, \quad \text{即 } \lambda(s) = \text{const.}$$

于是 (3) 化为

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda k) T + \lambda \tau B. \quad (4)$$

再将 (1) 式两端对 s 求导, 我们有

$$-\tau_1 N_1 \frac{ds_1}{ds} = s(-kT + \tau B).$$

把上式与 (1) 式的两端分别作外积, 可以得到

$$\tau_1 T_1 \frac{ds_1}{ds} = k B + \tau T.$$

若将 (4) 式代入, 则有

$$\tau_1(1 - \lambda k) T + \lambda \tau \tau_1 B = k B + \tau T.$$

比较系数可得到

$$\begin{cases} \tau_1(1 - \lambda k) = \tau, \\ \lambda \tau_1 \tau = k. \end{cases} \quad (5)$$

如果 $\tau_1 \neq 0$, 在 (5) 中消去 τ_1 即得

$$k = \lambda(k^2 + \tau^2). \quad (6)$$

如果 $\tau_1 = 0$, 这时 $k = \tau = 0$, 所以 (6) 式仍成立. 证毕.

注 在微分几何历史上, 满足例 10 题中条件的曲线 O 称为 Mannheim 曲线.

例 11 设两条空间挠曲线 O, O_1 之间可建立一种对应, 使得在对应点 O 的主法线与 O_1 的切线平行, 则 O, O_1 的曲率与挠率满足等式

$$\frac{\tau_1}{k_1} = \pm \frac{k\tau' - k'\tau}{(k^2 + \tau^2)^{3/2}}.$$

证明 根据题设有 $T_1 \parallel N$, 因而可设

$$T_1 = sN \quad (s = \pm 1). \quad (1)$$

将 (1) 式对 O 的弧长 s 求导, 我们有

$$k_1 \frac{ds_1}{ds} N_1 = s(-kT + \tau B). \quad (2)$$

为简便起见不妨设 $\frac{ds_1}{ds} > 0$, 不然只要改变一条曲线的定向即可. 由 (2) 式, 我们可置

$$N_1 = s \frac{-kT + \tau B}{\sqrt{k^2 + \tau^2}}. \quad (3)$$

从而 (1) 与 (3) 就给出

$$B_1 = \frac{kB + \tau T}{\sqrt{k^2 + \tau^2}}.$$

将(4)式再对 s 求导,

$$-\tau_1 \frac{ds_1}{ds} N_1 = -\frac{k k' + \tau \tau'}{(k^2 + \tau^2)^{3/2}} (kB + \tau T) + \frac{k'B + \tau'T}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \\ = \frac{k\tau' - k'\tau}{(k^2 + \tau^2)^{3/2}} (kT - \tau B).$$

将(3)式与上式两端分别作内积, 我们可以得到

$$-\tau_1 \frac{ds_1}{ds} = -\varepsilon \frac{k\tau' - k'\tau}{k^2 + \tau^2}. \quad (5)$$

另一方面, 由(2)可得

$$k_1 \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{k^2 + \tau^2}, \quad (6)$$

在(5)、(6)中消去 $\frac{ds_1}{ds}$, 我们最后就得到要证的

$$\frac{\tau_1}{k_1} = \pm \frac{k\tau' - k'\tau}{(k^2 + \tau^2)^{3/2}}.$$

证毕.

例 12 若两条挠曲线互为密切球心的轨迹, 试证明: 这两条曲线必具有相等的常数曲率, 因而事实上它们互为曲率中心(即密切圆圆心)的轨迹.

证明 设这两条曲线分别为 O, O_1 , 它们在相互对应的弧长分别为 s, s_1 . 这时按题设就有

$$\tau_1(s_1) = \tau(s) + \rho(s) N(s) + \frac{d\rho(s)}{ds} \cdot \sigma(s) B(s), \quad (1)$$

$$\tau(s) = \tau_1(s_1) + \rho(s_1) N_1(s_1) + \frac{d\rho_1(s_1)}{ds_1} \cdot \sigma_1(s_1) B_1(s_1). \quad (2)$$

将(1)式的两边对 O 的弧长 s 求导, 可得

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = T + \frac{d\rho}{ds} N + \rho(-kT + \tau B) \\ + \frac{d}{ds} \left(\frac{d\rho}{ds} \sigma \right) B - \frac{d\rho}{ds} N$$

$$= \left(\rho\tau + \frac{d}{ds} \left(\frac{d\rho}{ds} \sigma \right) \right) B.$$

上式右端的系数必非零, 不然 O 就是球面曲线(参见一般微分几何教程), 从而 O_1 退化为一点, 与它是挠曲线的假定矛盾. 因此我们可设

$$T_1 = \varepsilon B \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (3)$$

如果我们对(2)式作同样处理, 也可得到

$$T = \eta B_1 \quad (\eta = \pm 1). \quad (4)$$

根(3)、(4)式我们有

$$N = -\varepsilon\eta N_1. \quad (5)$$

(3)、(4)、(5)式说明了两条曲线在对应点的 Frenet 标架之间的关系.

另一方面, 若将(1)、(2)两式两边相加, 则有

$$\rho N + \frac{d\rho}{ds} \sigma B + \rho_1 N_1 + \frac{d\rho_1}{ds_1} \sigma_1 B_1 = 0.$$

利用(4)、(5), 把上式中的 N_1, B_1 用 N, T 代替, 便有

$$\eta \frac{d\rho_1}{ds_1} \sigma_1 T + (\rho - \varepsilon\eta\rho_1) N + \frac{d\rho}{ds} \sigma B = 0,$$

因此我们得到

$$\frac{d\rho_1}{ds_1} \sigma_1 = 0, \quad \rho = \varepsilon\eta\rho_1, \quad \frac{d\rho}{ds} \sigma = 0.$$

根据这三个等式已不难推知

$$\rho(s) = \rho_1(s_1) = \text{const.}$$

从而(1)、(2)化为

$$\tau_1(s_1) = \tau(s) + \rho N(s),$$

$$\tau(s) = \tau_1(s_1) + \rho_1 N_1(s_1),$$

式中的 $\rho = \rho_1$ 为常数. 证毕.

注 对本题我们还可以证明这两条曲线在对应点的挠率之积

处处相等, 恰好为它们公共曲率的平方. 读者不妨试证之.

有关两条对应曲线的切线、主法线、从法线之间的平行或重合等问题, 除了上面已介绍的例 9、10、11 之外, 尚有如下一些情形:

两条不同挠曲线的切线是不可能全部重合的, 它们的从法线也不可能全部重合. 然而, 两条不同曲线的主法线是有可能重合的, 这便是著名的 Bertrand 曲线偶的情形, 一条曲线的切线也有可能全是另一条曲线的主法线或从法线, 这是属于渐缩线与渐开线的问题. 这些问题均能用上述一些例题中介绍的方法进行处理, 也能在通常的微分几何教材中找到, 我们在此就不再一一叙述了.

作为本小节的结束, 我们只介绍如下的例题.

大家知道, 曲线 $O: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, s 为弧长, 的渐开线 O_1 有向量表示 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(s) + (c-s)\mathbf{T}(s)$, 其中 c 为常数. 现在我们来讨论下面反过来的问题:

例 13 已知挠曲线 $O: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, s 为弧长, 求 O 的渐缩线 O_1 .

解 由于 O_1 在任何点的切线恰为 O 在对应点的法线, 所以可设 O_1 的向量表示为

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(s) + \lambda(s)\mathbf{N}(s) + \mu(s)\mathbf{B}(s), \quad (1)$$

式中的 $\lambda(s)$ 、 $\mu(s)$ 为 s 的待定函数.

将(1)式两端对 O 的弧长 s 求导, 整理后有

$$\mathbf{T}_1 \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda k)\mathbf{T} + (\lambda' - \mu\tau)\mathbf{N} + (\mu' + \lambda\tau)\mathbf{B}. \quad (2)$$

根据题设的 O 、 O_1 之间的关系, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ 应该在 O_1 的切线上, 从而(1)式便给出 $\lambda\mathbf{N} + \mu\mathbf{B} \parallel \mathbf{T}_1$. 把这条件与(2)式作比较, 我们立即得到

$$1 - \lambda k = 0,$$

$$\frac{\lambda' - \mu\tau}{\lambda} = \frac{\mu' + \lambda\tau}{\mu}.$$

因此

$$\lambda(s) = \frac{1}{k(s)} = \rho(s), \quad (3)$$

$$\tau(s) = \frac{\mu\lambda' - \lambda\mu'}{\lambda^2 + \mu^2} = -\left(\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\right)'. \quad (4)$$

对(4)式积分, 有

$$-\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \int \tau(s) ds + c.$$

于是

$$\begin{aligned} \mu &= -\lambda \operatorname{tg} \left(\int \tau(s) ds + c \right) \\ &= -\rho(s) \operatorname{tg} \left(\int \tau(s) ds + c \right). \end{aligned} \quad (5)$$

把(3)、(5)代入(1), 我们就得到要求的渐缩线 O_1 是

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s) - \rho(s) \operatorname{tg} \left(\int \tau(s) ds + c \right) \mathbf{B}(s).$$

解毕.

§ 4 夹角的可微性

在平面曲线论中, 我们常常需要引进曲线的切向量 $\mathbf{T}$ 与某固定方向的夹角 $\bar{\theta}$. 为了使 $\bar{\theta}$ 确有定义, 便规定 $0 \leq \bar{\theta} < 2\pi$, 而且在讨论问题时还要对 $\bar{\theta}$ 进行微分运算. 例如, 若记 $\bar{\theta}$ 为平面曲线的切方向与 x 轴正方向的夹角时, 平面曲线的相对曲率 $k_r(s) = \frac{d\bar{\theta}(s)}{ds}$. 当曲线光滑时, 仿佛 $\bar{\theta}$ 的可微性也是天经地义的事. 然而深究一下的话, 实际情况并不是象我们想当然地那么简单, 其实 $\bar{\theta}$ 甚至可能是间断的, 因而它的可微性更是无从谈起了. 但是, 下面例题

叙述的结论可解决这个矛盾.

例 14 设 $\vec{\theta}(s)$ 是平面曲线的切向量 $T(s)$ (弧长 $s \in [0, L]$) 与 x 轴正向的夹角, $0 \leq \vec{\theta}(s) < 2\pi$. 那么可以定义一个连续可微的函数 $\theta(s)$, $s \in [0, L]$, 使得 $\theta(s) \equiv \vec{\theta}(s) \pmod{2\pi}$.

证明 设 $T(s) = (a(s), b(s))$, $s \in [0, L]$, 则 $a(s)$ 、 $b(s)$ 均为 s 的光滑函数. 按题设, 且有

$$a(s) = \cos \vec{\theta}(s), \quad b(s) = \sin \vec{\theta}(s). \quad (1)$$

令

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_0^s (a(s)b'(s) - a'(s)b(s)) ds, \quad (2)$$

这里的 $\theta_0 = \vec{\theta}(0)$, 则 $\theta(s)$ 是 $[0, L]$ 上的连续可微函数.

由于 $a^2(s) + b^2(s) = 1$, 对 s 求导后可得

$$a(s)a'(s) + b(s)b'(s) = 0.$$

注意到 (2)、(3) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (a(s) \cos \theta(s) + b(s) \sin \theta(s)) \\ &= a' \cos \theta + b' \sin \theta - a \sin \theta \cdot (ab' - a'b) \\ &\quad + b \cos \theta \cdot (ab' - a'b) \\ &= a' \cos \theta + b' \sin \theta - b' \sin \theta \cdot (a^2 + b^2) \\ &\quad - a' \cos \theta \cdot (a^2 + b^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 $a(s) \cos \theta(s) + b(s) \sin \theta(s) = \text{const.}$ 但当 $s=0$ 时, 利用 (1), 有

$$a(0) \cos \theta(0) + b(0) \sin \theta(0) = a^2(0) + b^2(0) = 1,$$

因此 $\forall s \in [0, L]$,

$$a(s) \cos \theta(s) + b(s) \sin \theta(s) = 1. \quad (4)$$

这样一来, $\forall s \in [0, L]$

$$\begin{aligned} & (a(s) - \cos \theta(s))^2 + (b(s) - \sin \theta(s))^2 \\ &= a^2(s) + b^2(s) + \sin^2 \theta(s) + \cos^2 \theta(s) \\ &\quad - 2(a(s) \cos \theta(s) + b(s) \sin \theta(s)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

也就是

$$a(s) = \cos \theta(s), \quad b(s) = \sin \theta(s). \quad (5)$$

比较 (1) 与 (5), 就有

$$\cos \vec{\theta}(s) = \cos \theta(s), \quad \sin \vec{\theta}(s) = \sin \theta(s).$$

这便说明对每个 $s \in [0, L]$, $\theta(s)$ 与 $\vec{\theta}(s)$ 相差 2π 的整数倍, 即

$$\theta(s) \equiv \vec{\theta}(s) \pmod{2\pi}.$$

证毕.

注 自然, 上面的结论不只适用于平面曲线的切向量场, 其实它对平面上依赖于单参数的光滑单位向量场均适用. 我们用这个光滑的 $\theta(s)$ 代替前面的 $\vec{\theta}(s)$ 作为角度的一种新的度量, 那么诸如

$$h_r(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

这类熟知的公式就能放心运用而无后顾之忧了.

当然, 满足题中要求的 $\theta(s)$ 也可用其他的分析方法或拓扑学中覆盖空间的理论求得, 但与它们相比, 这里介绍的方法要简洁得多.

第二章 曲线的一些整体性质

§ 1 卵形线和支持函数

如所知, 卵形线是相对曲率 k_r 处处不变号并且非零的平面简单闭曲线. 我们先来介绍一种表示卵形线的新方法, 它在讨论卵形线有关性质时会带来不少方便.

例 15 设 O 是平面上的一条卵形线, 取逆时针方向为它的正向. 如图, 将坐标原点 O 取在所围区域的内部, 设 l 是 O 在 (x, y) 点处的一条有向切线, 记 α 轴正向到 l 正向的有向角为 θ , 并记 O 点到直线 l 的距离为 $p(\theta)$ ($p(\theta)$ 可看成是周期为 2π 的可微函数). 试求卵形线 O 以 θ 为参数的参数方程.

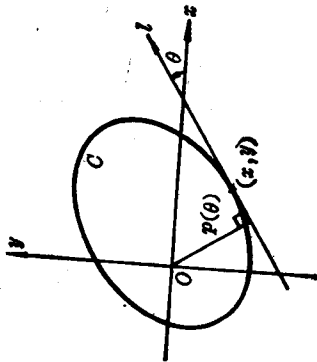


图 2

解 容易知道, O 点在 l 上垂足的坐标是 $(p(\theta)\sin\theta, -p(\theta)\cos\theta)$. 因此直线 l 的方程是

$$Y + p(\theta)\cos\theta = \operatorname{tg}\theta[X - p(\theta)\sin\theta],$$

亦即

$$X\sin\theta - Y\cos\theta - p(\theta) = 0. \quad (1)$$

当 O 上的点变化时, O 在这些点的切线全体就构成一个单参数直线族, (1)便是这个直线族的方程, 而这时的卵形线 O 就可看成是这个直线族的包络曲线. 将(1)式关于 θ 求导, 有

$$X\cos\theta + Y\sin\theta - p'(\theta) = 0. \quad (2)$$

于是按照包络的理论, 卵形线上对应于切线 l 的切点 $(x(\theta), y(\theta))$ 必须同时满足(1)和(2). 解由(1)、(2)组成的联立方程, 我们便得到

$$\begin{cases} x(\theta) = p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta, \\ y(\theta) = -p(\theta)\cos\theta + p'(\theta)\sin\theta. \end{cases} \quad (3)$$

公式(3)就是所求的表示卵形线的参数方程, 上述的函数 $p(\theta)$ 称做卵形线的支持函数, 有时卵形线就简单地用它对应的支持函数 $p=p(\theta)$ 来表示, 由于(1)式, 后一表示式也称作切极线方程. 解毕.

例 16 设卵形线 O 的支持函数为 $p(\theta)$. 试证明以下各等式:

- (i) 相对曲率 $k_r(\theta) = \frac{1}{p(\theta) + p''(\theta)}$;
- (ii) O 的周长 $L = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta$ (Cauchy 公式);
- (iii) O 所围区域的面积

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2(\theta) - p'^2(\theta)) d\theta \quad (\text{Blaschke 公式}).$$

证明 (i) 根据例 15 中的(3), 直接计算可得

$$\begin{cases} x'(\theta) = (p(\theta) + p''(\theta))\cos\theta, \\ y'(\theta) = (p(\theta) + p''(\theta))\sin\theta; \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} x''(\theta) = (p'(\theta) + p'''(\theta))\cos\theta - (p(\theta) + p''(\theta))\sin\theta, \\ y''(\theta) = (p'(\theta) + p'''(\theta))\sin\theta + (p(\theta) + p''(\theta))\cos\theta. \end{cases}$$

注意到 θ 角的定义, 切线 l 的正向应为

$$(x'(\theta), y'(\theta)) = (p(\theta) + p''(\theta))(\cos\theta, \sin\theta),$$

于是恒有 $p(\theta) + p''(\theta) > 0$. 最后将计算所得的 $x'(\theta), y'(\theta), x''(\theta), y''(\theta)$ 代入平面曲线相对曲率的计算公式, 就得到 O 的相对曲率为 (假定逆时针方向为卵形线 O 的正定向)

$$h_r(\theta) = \frac{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)}{(x'^2(\theta) + y'^2(\theta))^{3/2}} \\ = \frac{(p(\theta) + p''(\theta))^2}{[p(\theta) + p''(\theta)]^3} = \frac{1}{p(\theta) + p''(\theta)}.$$

(ii) 根据曲线求长公式, O 的周长经直接计算为

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} (p(\theta) + p''(\theta)) d\theta.$$

又由分部积分公式, 并注意到 O 为闭曲线, 即 $p(\theta)$ 是周期为 2π 的函数, 所以

$$\int_0^{2\pi} p''(\theta) d\theta = p'(2\pi) - p'(0) = 0.$$

从而 Cauchy 公式成立.

(iii) 仍由微积分公式, O 所围区域的面积

$$A = \frac{1}{2} \oint_0^{2\pi} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [x(\theta)y'(\theta) - x'(\theta)y(\theta)] d\theta \\ = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\theta) [p(\theta) + p''(\theta)] d\theta.$$

再由分部积分公式, 其中的

$$\int_0^{2\pi} p(\theta)p''(\theta) d\theta = p(\theta)p'(\theta) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} p'^2(\theta) d\theta \\ = - \int_0^{2\pi} p'^2(\theta) d\theta,$$

所以 Blaschke 公式也成立. 证毕.

一般而言, 如果平面曲线 O^* 在另一条平面曲线 O 所围区域的外部, 曲线 O^* 与 O 的点之间可建立双方一一的连续可微对应, 使得对应点的切线互相平行, 并且这两条平行切线之间的距离处处为正常数 r , 那么曲线 O^* 便称为曲线 O 的外等距 r 的曲线. 对于卵形线 O , 利用前述的支持函数 $p(\theta)$, 我们能证明下述的.

例 17 (J. Steiner 定理) 设卵形线 O 的周长为 L , 所围区域的面积为 A , 则它的外等距 r 的曲线的周长 $L_r = L + 2\pi r$, 所围的

面积 $A_r = A + \tau L + \pi r^2$.

证明 如同例 15 的 (3), 卵形线 O 的外等距 r 的曲线 O^* 应具有下列的参数方程

$$\begin{cases} x^*(\theta) = (p(\theta) + r) \sin \theta + p'(\theta) \cos \theta, \\ y^*(\theta) = -(p(\theta) + r) \cos \theta + p'(\theta) \sin \theta. \end{cases}$$

类似于例 16 中的 (i), 由此可直接算得 O^* 的相对曲率为

$$h_r^*(\theta) = \frac{x''(\theta)y'^*(\theta) - x'^*(\theta)y''(\theta)}{[x'^*(\theta)^2 + y'^*(\theta)^2]^{3/2}} \\ = \frac{1}{p(\theta) + r + p''(\theta)} > 0,$$

因此 O^* 也是卵形线, 且容易看出, 它的支持函数 (见例 15)

$$p^*(\theta) = p(\theta) + r.$$

于是我们便能利用例 16 中的 (ii)、(iii) 来计算 O^* 的周长和面积:

$$L_r = \int_0^{2\pi} p^*(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (p(\theta) + r) d\theta = L + 2\pi r;$$

$$A_r = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(p^*(\theta))^2 - (p'^*(\theta))^2] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(p(\theta) + r)^2 - p'^2(\theta)] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p^2(\theta) - p'^2(\theta) + 2rp(\theta) + r^2] d\theta$$

$$= A + \tau L + \pi r^2,$$

在最后的等式中我们再次对 O 利用了 Cauchy 公式和 Blaschke 公式. 证毕.

大家知道, 任何圆周总有外切正方形, 对一般的卵形线我们则有下面的

例 18 任何卵形线至少有一个外切正方形.

证明 设 O 是平面上的一条卵形线, 它的支持函数 (见例 15) 为 $p(\theta)$. 令

$$u(\theta) = p(\theta) + p(\theta + \pi),$$

则 $u(\theta)$ 表示卵形线 O 的两条平行切线之间的距离。由于 $p(\theta)$ 周期为 2π 的可微函数，从而

$$u(\theta + \pi) = u(\theta),$$

即 $u(\theta)$ 是周期为 π 的可微函数。

自然, $u(\theta + \frac{\pi}{2})$ 表示与上述两条切线垂直的、 O 的另外两条平行切线之间的距离。请注意, 这四条切线恰组成卵形线 O 的一个外切矩形。若记

$$v(\theta) = u(\theta) - u(\theta + \frac{\pi}{2}),$$

则 $v(\theta)$ 正好表示这个外切矩形两条邻边长的差, 它也是周期为 π 的可微函数。由于

$$\begin{aligned} v(\theta + \frac{\pi}{2}) &= u(\theta + \frac{\pi}{2}) - u(\theta + \pi) = u(\theta + \frac{\pi}{2}) - u(\theta) \\ &= -v(\theta) \end{aligned}$$

根据连续函数的性质, $v(\theta)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上必定至少有一个零点 θ_0 , 即 $v(\theta_0) = 0$ 。对于这个 θ_0 决定的 O 的外切矩形, 由于邻边长的差 $u(\theta_0) - u(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) = 0$, 所以实际上它是 O 的一个外切正方形。证毕。

例 19 设平面上有两条卵形线 O 和 O_1 “内切”^①于 O 点。若它们在任意具有相同切方向的点 P 和 P_1 处, 两曲线的曲率满足不等式 $k_1|_{P_1} \leq k|_P$, 则 O 所围区域必定全部包含在 O_1 所围区域中。

证明 如图, 我们把它们的切点 O 取为坐标原点, 规定逆时针

^① 这里内切的意义是 O, O_1 在它们公切线的同侧。

针方向为这两条卵形线的正向, 并取它们在 O 点的公切线的正向定为 x 轴的方向。设 $p(\theta), p_1(\theta)$ 分别为 O, O_1 的支持函数。

由例 15 知, 支持函数 $p(\theta)$ 其实是原点 O 到卵形线 O 上 $(\alpha(\theta), y(\theta))$ 点处切线 l 的距离。类似地, 支持函数的导数 $p'(\theta)$ 也有明确的几何意义, 由例 15 的 (2) 式知, $p'(\theta)$ 恰好是原点 O 到 O 在 $(\alpha(\theta), y(\theta))$ 点法线的距离。现在的原点 O 恰好取在卵形线上, 因此函数 $p(\theta)$ 与 $p'(\theta)$ 就必须满足初始条件

$$p(0) = p'(0) = 0.$$

由例 16 知, O 的相对曲率

$$k_r(\theta) = \frac{1}{p(\theta) + p''(\theta)} > 0,$$

从而如果已知卵形线 O 的曲率 $k(\theta) = k_r(\theta)$, 则它的支持函数 $p(\theta)$ 就应该是下述常微分方程定解问题的解:

$$\begin{cases} p''(\theta) + p(\theta) = \frac{1}{k(\theta)}, \\ p(0) = p'(0) = 0. \end{cases}$$

因此 $p(\theta)$ 便可由 $k(\theta)$ 唯一地确定为

$$p(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin(\theta - \varphi)}{k(\varphi)} d\varphi.$$

如对 O_1 作类似讨论, 同理可得 O_1 的支持函数 $p_1(\theta)$ 由其曲率 $k_1(\theta)$ 唯一地确定为

$$p_1(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin(\theta - \varphi)}{k_1(\varphi)} d\varphi.$$

于是我们得到

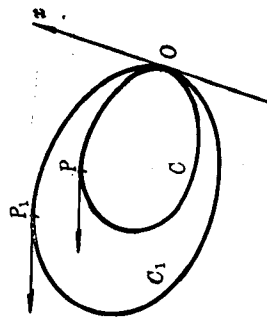


图 4

$$p_1(\theta) - p(\theta) = \int_0^\theta \frac{k(\varphi) - k_1(\varphi)}{k(\varphi)k_1(\varphi)} \sin(\theta - \varphi) d\varphi.$$

根据题设条件, 我们总有

$$\frac{k(\varphi) - k_1(\varphi)}{k(\varphi)k_1(\varphi)} \geq 0,$$

至于 $\sin(\theta - \varphi)$ 这个因子, 我们分以下情况讨论之:

当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时, 由于 $0 \leq \varphi \leq \theta$, 故 $\sin(\theta - \varphi) \geq 0$, 从而

$$p_1(\theta) - p(\theta) \geq 0;$$

当 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ 时, 我们把卵形线 O 和 O_1 关于它们在 O 点的公切线作轴对称, 并将 ω 轴方向倒转, 这样就能和上面一样得到 $p_1(\tilde{\theta}) - p(\tilde{\theta}) \geq 0$, 这里的 $\tilde{\theta}$ 和原来对应的 θ 满足 $\tilde{\theta} + \theta = 2\pi$. 因此我们总有 $p_1(\theta) \geq p(\theta)$ 成立, 注意到卵形线是其所有切线的包络, 所以上述条件就蕴涵 O 所围区域必定全部包含在 O_1 所围区域中. 证毕.

注 由本题结论容易推得一个卵形线的最小密切圆必定全在该卵形线的内部, 而它的最大密切圆必定包含整个卵形线. 本例结论由 Blaschke 所证.

§ 2 等宽曲线

本节材料取自苏步青教授著《微分几何五讲》第一讲习题.

设 O 是平面上的一条卵形线. 根据例 18 我们知道, $u(\theta) = p(\theta) + p(\theta + \pi)$ 是 O 的两条平行切线之间的距离. 如果 $u(\theta) = k^*$, k^* 是正常数, 那么卵形线 O 称为等宽曲线 (也叫定幅曲线), k^* 称为曲线的宽度 (也叫幅).

例 20 证明: 平面上等宽曲线的周长等于其宽度的 π 倍.

证明 由于支持函数 $p(\theta)$ 是 θ 的周期为 2π 的连续函数, 利用数学分析中的 Fourier 级数理论, $\forall \theta \in [0, \pi]$,

$$p(\theta) = -\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} p(\theta + \pi) &= -\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k(\theta + \pi) + b_k \sin k(\theta + \pi)] \\ &= -\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

将 (1) 与 (2) 相加, 我们有

$$p(\theta) + p(\theta + \pi) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k} \cos 2k\theta + b_{2k} \sin 2k\theta). \quad (3)$$

因为已知曲线是等宽曲线, $p(\theta) + p(\theta + \pi) = k^*$, 所以利用三角函数的正交性, 由 (3) 我们可得

$$a_0 = k^*, \quad a_{2k} = 0, \quad b_{2k} = 0.$$

再根据 Fourier 级数展开系数的计算公式以及例 16 所给计算卵形线周长的 Cauchy 公式, 我们最后得到

$$k^* = a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = \frac{L}{\pi},$$

这里的 L 是所给等宽曲线的周长. 证毕.

注 其实如果利用周期函数在长度为其周期的任何一段区间上积分值不变这个性质, 我们对 $p(\theta) + p(\theta + \pi) = k^*$ 这个条件在 $[0, 2\pi]$ 上直接积分, 再利用例 16 中的 Cauchy 公式, 那立即得到

$$L = \pi k^*$$

的结论.

当等宽曲线上两点有平行切线时, 称这两点为对点. 关于对点, 有下列表述的两个有趣的性质:

例 21 (i) 等宽曲线的对点的连线是这曲线的二重法线. (ii) 等宽曲线在对点的相对曲率倒数之和恰为宽度 k^* .

证明 (i) 设 A_1, A_2 是等宽曲线 O 的对点. A_1 的坐标是 (α_1, y_1) , A_2 的坐标是 (α_2, y_2) . 根据例 15 的公式 (3), 对某个 $\theta \in [0, \pi]$, 我们有

$$\begin{cases} x_1 = p(\theta) \sin \theta + p'(\theta) \cos \theta, \\ y_1 = -p(\theta) \cos \theta + p'(\theta) \sin \theta; \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x_2 = p(\theta + \pi) \sin(\theta + \pi) + p'(\theta + \pi) \cos(\theta + \pi), \\ y_2 = -p(\theta + \pi) \cos(\theta + \pi) + p'(\theta + \pi) \sin(\theta + \pi). \end{cases}$$

利用 $p(\theta + \pi) = h^* - p(\theta)$, 我们能把后一组公式改写为

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - h^* \sin \theta, \\ y_2 = y_1 + h^* \cos \theta. \end{cases} \quad (2)$$

由(1)、(2)即知, 点 A_2 与 A_1 连线的斜率是

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h^* \cos \theta}{-h^* \sin \theta} = -\operatorname{ctg} \theta,$$

而过 A_1 点切线的斜率为 $\operatorname{tg} \theta$, 由于 $-\operatorname{ctg} \theta \cdot \operatorname{tg} \theta = -1$, 所以点 A_1 与 A_2 的连线垂直于过 A_1 的切线, 当然它也垂直于过点 A_2 的切线. 因而这条连线是这曲线的二重法线.

(ii) 由于 $p(\theta) + p(\theta + \pi) = h^*$, 关于 θ 求导两次, 我们有

$$p''(\theta) + p''(\theta + \pi) = 0.$$

于是,

$$[p(\theta) + p''(\theta)] + [p(\theta + \pi) + p''(\theta + \pi)] = h^*.$$

注意到例 16 中的公式(i), 上式就是要求证明的

$$\frac{1}{h_r(\theta)} + \frac{1}{h_r(\theta + \pi)} = h^*.$$

证毕.

当卵形线的两条平行切线之间的距离为最大时, 称这距离为该卵形线的直径. 关于卵形线的直径与等宽曲线, 有下列叙述的结论.

例 23 (i) 在所有以 D 为直径的卵形线中, 宽度是 D 的等宽曲线有最大周长.

(ii) 若卵形线 O 的直径是 D , 所围区域面积是 A , 则

$$A \leq \frac{1}{4} \pi D^2,$$

当且仅当 O 是圆周时, 等号成立.

证明 (i) 从直径的定义可得

$$D = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} [p(\theta) + p(\theta + \pi)]. \quad (1)$$

如设此卵形线周长为 L , 按例 16 中(ii)给出的 Cauchy 公式,

$$L = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = \int_0^\pi p(\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} p(\theta) d\theta.$$

在上式的后一积分中, 令 $\theta = \theta_1 + \pi$, 有

$$\int_\pi^{2\pi} p(\theta) d\theta = \int_\pi^\pi p(\theta_1 + \pi) d\theta_1.$$

仍记 θ_1 为 θ , 并将上式代回 L 的表达式, 注意到(1)就有

$$L = \int_0^\pi [p(\theta) + p(\theta + \pi)] d\theta \leq \pi D.$$

根据例 20, πD 恰是宽度为 D 的等宽曲线的周长.

(ii) 根据例 16 中(iii)所给出的 Blaschke 公式的推导过程, 并利用本题(i)已证结果, 我们有

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\theta) [p(\theta) + p''(\theta)] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi p(\theta) ds(\theta) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi [p(\theta) + p(\theta + \pi)] ds(\theta) \\ &\leq \frac{1}{4} D \int_0^\pi ds = \frac{1}{4} D L \leq \frac{1}{4} \pi D^2, \end{aligned} \quad (2)$$

在上面的第二个等式中我们还利用了关系式

$$\frac{1}{p(\theta) + p''(\theta)} = h_r(\theta) = \frac{d\theta}{ds}.$$

如果 $A \leq \frac{1}{4} \pi D^2$ 中等号成立, 则(2)式中所有不等式全化为等

式. 由此可知 $\forall \theta \in [0, 2\pi]$,

$$p(\theta) + p(\theta + \pi) = D,$$

即卵形线 O 是等宽曲线, 它的周长 $L = \pi D$, 所围区域的面积

$$A = \frac{1}{4} \pi D^2,$$

这时由著名的等周不等式

$$L^2 - 4\pi A = (\pi D)^2 - 4\pi \cdot \frac{1}{4} \pi D^2 = 0,$$

从而卵形线 O 必为一圆周. 另一方面, 当 O 为圆周时,

$$A = \frac{1}{4} \pi D^2$$

成立是自然的. 证毕.

§3 卵形线的顶点和平均点

设 O 是平面上的一条卵形线, 我们沿用本章 §1 中的约定和记号. 根据切线的旋转指标定理, x 轴的正向与 O 在每一点切线向来的有向角 $\theta(s)$ 满足 $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi$, 这里的 L 是 O 的周长. 于是, 注意到 O 的相对曲率

$$k_r(\theta(s)) = \frac{d\theta(s)}{ds},$$

我们把满足 $k_r = \frac{2\pi}{L}$ 的点称为卵形线 O 上的平均点. 大家知道, 每一条卵形线至少有四个顶点, 这是著名的四顶点定理; 关于平均点, 则有下面的结论.

例 23 平面上每一条卵形线至少有四个平均点.

证明 设卵形线 O 的支持函数为 $p(\theta)$. 根据例 16 的 (i)

$$\frac{1}{k_r(\theta)} = p(\theta) + p''(\theta). \quad (1)$$

利用 Fourier 级数理论, 我们有

$$\frac{1}{k_r(\theta)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \quad (2)$$

对于展开式中的系数, 利用例 16(ii) 中的 Cauchy 公式, 先有

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{k_r(\theta)} d\theta = \frac{L}{\pi}. \quad (3)$$

又由于

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{k_r(\theta)} \cos k\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) \cos k\theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p''(\theta) \cos k\theta d\theta, \end{aligned}$$

对右端的第二个积分进行分部积分, 并注意到 $p(\theta)$ 、 $p'(\theta)$ 都是周期为 2π 的函数, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p''(\theta) \cos k\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos k\theta dp'(\theta) \\ &= k \int_0^{2\pi} \sin k\theta \cdot p'(\theta) d\theta \\ &= -k^2 \int_0^{2\pi} p(\theta) \cos k\theta d\theta. \end{aligned}$$

于是

$$a_k = \frac{1}{\pi} (1 - k^2) \int_0^{2\pi} p(\theta) \cos k\theta d\theta, \quad k = 1, 2, \dots$$

同理可得

$$b_k = \frac{1}{\pi} (1 - k^2) \int_0^{2\pi} p(\theta) \sin k\theta d\theta, \quad k = 1, 2, \dots$$

因此我们得到

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 0. \quad (4)$$

将 (3)、(4) 代入 (2) 便有

$$\frac{1}{k_r(\theta)} = \frac{L}{2\pi} + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \quad (5)$$

令

$$F(\theta) = \frac{1}{k_r(\theta)} - \frac{L}{2\pi} = p(\theta) + p''(\theta) - \frac{L}{2\pi}.$$

显然, 满足 $F(\theta) = 0$ 的 θ , 恰对应于卵形 O 的平均点.

由于

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta - L = 0,$$

所以 $F(\theta)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内至少变号一次 ($F(\theta) \equiv 0$ 是平凡的情况, 这蕴含 $k_r(\theta) = \text{const}$, 即 O 为圆周, 结论自然成立), 但变号不会有一次, 我们用反证法说明如下: 若只有一点 $\theta_0 \in (0, 2\pi)$, 使 $F(\theta_0) = 0$ 而 $F(\theta)$ 在 $[0, \theta_0)$, $(\theta_0, 2\pi]$ 内分别保持不同的正号, 则由于 $F(0) = F(2\pi)$, 这显然是不可能的, 所以 $F(\theta)$ 至少两个零点, 即有 $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, 使得 $F(\theta_1) = F(\theta_2) = 0$. 由于

$$F(0) = F(2\pi),$$

故 $F(\theta)$ 至少变号两次.

设 θ_1, θ_2 把卵形线 O 分成 O_1, O_2 两段, 其中 O_1 是对应 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ 的这一段. 依照 Rolle 定理, $F(\theta)$ 在 O_1, O_2 内至少各极值一次. 不妨设在 O_1 上, $F(\theta)$ 在 θ_3 处取正的最大值, 在 O_2 上, $F(\theta)$ 在 θ_4 处取负的最小值.

由于 (4), 我们有

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} F(\theta) \sin \theta d\theta = 0.$$

因此, 再注意到 (7), 就很容易看到

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) \left[\cos \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right] d\theta = 0.$$

上式正好说明

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) \sin \frac{\theta - \theta_1}{2} \sin \frac{\theta - \theta_2}{2} d\theta = 0. \quad (8)$$

如果 $F(\theta)$ 只有两个零点, 则在 O_2 内部 $F(\theta) < 0$, 也就是 $\theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi)$ 时 $F(\theta) < 0$; 在 O_1 内部 $F(\theta) > 0$, 即当 $\theta \in$

(θ_1, θ_2) 时 $F(\theta) > 0$. 因此, 在 O_1 内, 由于

$$\sin \frac{\theta - \theta_1}{2} \sin \frac{\theta - \theta_2}{2} < 0,$$

所以 $F(\theta) \sin \frac{\theta - \theta_1}{2} \sin \frac{\theta - \theta_2}{2} < 0$,

而在 O_2 内, 由于

$$\sin \frac{\theta - \theta_1}{2} \sin \frac{\theta - \theta_2}{2} > 0,$$

所以仍有

$$F(\theta) \sin \frac{\theta - \theta_1}{2} \sin \frac{\theta - \theta_2}{2} < 0.$$

于是必有

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) \sin \frac{\theta - \theta_1}{2} \sin \frac{\theta - \theta_2}{2} d\theta < 0,$$

显然, 这与等式 (8) 是矛盾的.

由上讨论我们知道, $F(\theta)$ 至少还有第三个零点. 如果 $F(\theta)$ 只有三个零点, 在经过 θ_1, θ_2 处时, $F(\theta)$ 改变符号, 不妨设第三个零点 $\theta_3 (\theta_1 < \theta_3 < \theta_2)$ 在 O_1 上. 由于在 O_2 上, $F(\theta) < 0$. 则在 θ_1 与 θ_3 之间 $F(\theta)$ 不变号, 大于零, 在 θ_3 与 θ_2 之间 $F(\theta)$ 也不变号, 大于零, 只有在 θ_3 处 $F(\theta_3) = 0$. 否则的话, 还会增加新的零点. 去掉 θ_3 点, 上面的推导仍成立, 积分后仍旧能导出矛盾, 所以 $F(\theta)$ 必有第四个零点, 也就是说, 卵形线 O 至少有四个平均点. 证毕.

注 卵形线的四个平均点把此卵形线分成四段曲线弧, 依照微分学里的 Rolle 定理, 在这四段曲线弧上就分别有四个 k_r 的逗留点 (即 k_r 的导数为零的点), 它们自然是 O 的四个顶点. 因此, 例 23 所叙述的卵形线的这条性质要比著名的四顶点定理更深刻些.

§4 球面曲线的判定

从曲线论的基本定理知道,在至多相差一个运动的范围内,一条空间曲线完全由它的曲率和挠率确定.那么,一条曲线要完全位于一个固定的球面上,它的曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 应该满足什么条件呢?以下就是两条熟知的判别法则(本节中的 s 均表示所论曲线的弧长):

一、若曲线 O 的曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 不取零值,则曲线 O 位于一个球面上的充分必要条件是

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\tau(s)} \frac{d}{ds} \frac{1}{k(s)} \right] + \frac{\tau(s)}{k(s)} = 0;$$

二、若曲线 O 的挠率 $\tau(s)$ 不取零值,曲率 $k(s)$ 及其导数 $\frac{dk(s)}{ds}$ 也不取零值,则曲线 O 位于一个球面上的充分必要条件是

$$\frac{1}{k^2(s)} + \frac{1}{\tau^2(s)} \left(\frac{d}{ds} \frac{1}{k(s)} \right)^2 = \text{正常数}.$$

这两条判别法则的证明并不困难,我们把它留给读者.在下面的例题中,我们要介绍第三个判别法则,它的优越之处是所论曲线的挠率 $\tau(s)$ 只要求是连续函数,而且可以取零值.

例24 一条非平面曲线 $O: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 位于一个球面上的充分必要条件是存在不全为零的常数 A 和 B ,使得 O 的曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 满足条件

$$k(s) \left[A \cos \int_0^s \tau(t) dt + B \sin \int_0^s \tau(t) dt \right] = 1.$$

注 这里的“非平面曲线”是指挠率 $\tau(s)$ 不恒为零的曲线.

证明 必要性: 如果曲线 O 位于球心在原点、半径为 R 的球面上,那么

$$\mathbf{r}^2(s) = R^2, \quad \mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0.$$

于是,我们可置

$$\mathbf{r}(s) = R \cos \theta(s) \cdot \mathbf{N}(s) + R \sin \theta(s) \cdot \mathbf{B}(s).$$

将上式两端对 s 求导,为简便起见,我们省略自变量就有

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -R \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \mathbf{N} + R \cos \theta (-k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) \\ & + R \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \mathbf{B} - R \sin \theta \cdot \tau \mathbf{N}. \end{aligned}$$

利用 $\mathbf{T}$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{B}$ 是线性无关的三向量,由上式可得

$$\begin{cases} 1 + Rk \cos \theta = 0, \\ \sin \theta \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} + \tau \right) = 0, \\ \cos \theta \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} + \tau \right) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

由(1)的第一式知道, $\cos \theta \neq 0$. 因而可得

$$\frac{d\theta}{ds} + \tau = 0.$$

积分后有

$$\theta(s) = - \int_0^s \tau(t) dt + \theta_0,$$

这里的 θ_0 是常数. 把所得的 $\theta(s)$ 代回到(1)的第一式,有

$$Rk(s) \cos \left(\int_0^s \tau(t) dt - \theta_0 \right) = -1,$$

这就是

$$Rk(s) \left[\cos \theta_0 \cos \int_0^s \tau(t) dt + \sin \theta_0 \sin \int_0^s \tau(t) dt \right] = -1. \quad (2)$$

如果令常数

$$A = -R \cos \theta_0, \quad B = -R \sin \theta_0,$$

那么(2)式便可以写成

$$k(s) \left[A \cos \int_0^s \tau(t) dt + B \sin \int_0^s \tau(t) dt \right] = 1,$$

这正是所要证的必要条件.

充分性: 若曲线 C 的曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 满足题设的条件
 令 $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, $A = -R \cos \theta_0$, $B = -R \sin \theta_0$, 这里的常数
 满足 $0 < \theta_0 < 2\pi$, 那么题设的条件可改写成

$$Rk(s) \cos \left(\int_0^s \tau(t) dt - \theta_0 \right) = -1. \quad (3)$$

再令 $\theta(s) = -\int_0^s \tau(t) dt + \theta_0$, 则

$$\frac{d\theta(s)}{ds} + \tau(s) = 0, \quad (4)$$

而 (3) 也就变为

$$Rk(s) \cos \theta(s) = -1. \quad (5)$$

利用 (4) 和 (5), 我们可作如下的改写

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{T}(s) + \mathbf{0} \\ &= -Rk(s) \cos \theta(s) \cdot \mathbf{T}(s) \\ &\quad + R \left(\frac{d\theta(s)}{ds} + \tau(s) \right) (-\sin \theta(s) \cdot \mathbf{N}(s) \\ &\quad + \cos \theta(s) \cdot \mathbf{B}(s)) \\ &= \frac{d}{ds} [R \cos \theta(s) \cdot \mathbf{N}(s) + R \sin \theta(s) \cdot \mathbf{B}(s)]. \end{aligned}$$

将上式两端积分, 有

$$\mathbf{r}(s) = R(\cos \theta(s) \cdot \mathbf{N}(s) + \sin \theta(s) \cdot \mathbf{B}(s)) + \mathbf{c},$$

这里的 $\mathbf{c}$ 是一个常向量. 从上式立即可得

$$(\mathbf{r}(s) - \mathbf{c})^2 = R^2,$$

这表明曲线 C 在以 $\mathbf{c}$ 的终点为球心、 R 为半径的球面上. 证毕.

§ 5 空间曲线多边形的全曲率

在本节, 我们将介绍杭州大学白正国教授证明的下列结果, 有

关的文章发表在 1957 年的《数学学报》上.

例 25 定理: 设 C 是一条空间曲线多边形, 具有内角 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, 则 C 的全曲率

$$\int_0^l k(s) ds \geq \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n - (n-2)\pi,$$

等号只限于这曲线多边形由同一平面上的凸曲线弧连结而成时成立. 这里的 s 是 C 的弧长.

在证明本节定理之前, 我们先讲述一些预备知识. 设曲线多边形 C 的顶点为 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 内角分别是 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. 设在顶点 A_i 处的两单位切向量夹角为 $\varphi_i (1 \leq i \leq n)$, 则 $\varphi_i = \pi - \theta_i$. 在每个顶点 A_i 处加一族单位向量 $\{T_i\}$, 它是在 φ_i 内部朝正方向旋转的所有单位向量的集合. $\{T_1\}, \{T_2\}, \dots, \{T_n\}$ 以及 C 的所有单位切向量的集合 $\{T\}$, 构成一个连续变化的单位向量族 (Σ) .

对于空间任意选定的单位向量 $\mathbf{v}$, 取 $\mathbf{v}$ 为 z 轴的正向, 则 $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$. 对于以弧长 s 为参数的曲线 C : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, 其单位切向量

$$\mathbf{T}(s) = \left(\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, \frac{dz(s)}{ds} \right),$$

$$\text{故} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(s) = \frac{dz(s)}{ds}.$$

由于 C 是闭曲线, $\frac{dz(s)}{ds}$ 不能全取正值, 也不能全取负值. 如以 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{T}(s) \rangle$ 表示 $\mathbf{v}, \mathbf{T}(s)$ 之间的夹角, $0 \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}(s) \rangle \leq \pi$, 利用 $\cos \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}(s) \rangle = \frac{dz(s)}{ds}$ 可以知道, 有 s_1, s_2 , 满足 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{T}(s_1) \rangle < \frac{\pi}{2}$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{T}(s_2) \rangle > \frac{\pi}{2}$. 因为 (Σ) 是连续变化的单位向量族, 所以有 (Σ) 中的单位向量与 $\mathbf{v}$ 垂直.

对于空间中任意选定的两个单位向量 v_1, v_2 , 如果 $v_1 = -v_2$, 则从上面的叙述可以看到, 有 $u \in (\Sigma)$, 使得

$$\langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle = \pi.$$

如果 $v_1 \neq -v_2$, 记 $v_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $v_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. 令

$$v = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2),$$

由于 $v_1 \neq -v_2$, 则 $v \neq 0$. 对于单位向量 $\frac{v}{|v|}$, 由上面的讨论知, 必有 (Σ) 中的一个单位向量 $w = (\alpha, \beta, \gamma)$, 它与 $\frac{v}{|v|}$ 垂直. 因此

$$\alpha(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta(\beta_1 + \beta_2) + \gamma(\gamma_1 + \gamma_2) = 0,$$

即

$$\cos \langle w, v_1 \rangle + \cos \langle w, v_2 \rangle = 0.$$

我们把它改写为

$$\cos \langle w, v_1 \rangle = \cos(\pi - \langle w, v_2 \rangle).$$

由于 $0 \leq \langle w, v_1 \rangle \leq \pi$, $0 \leq \pi - \langle w, v_2 \rangle \leq \pi$, 由上式即得

$$\langle w, v_1 \rangle + \langle w, v_2 \rangle = \pi.$$

另外, 从初等几何知识知道: 对于空间中的三个单位向量 u_1, u_2, u_3 , 有

$$\langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_3 \rangle \geq \langle u_1, u_3 \rangle.$$

由此, 利用数学归纳法很容易证明, 对于空间中的 n 个向量 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 有

$$\langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_3 \rangle + \dots + \langle u_{n-1}, u_n \rangle \geq \langle u_1, u_n \rangle. \quad (1)$$

下面, 我们以引理的形式再讲一个预备知识.

引理: 设曲线 O 在两点 P_1, P_2 的单位切向量 $T(s_1), T(s_2)$ 的交角是 φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$, 而且 O 在 P_1 到 P_2 的曲线段上无角点, 则 $\int_{s_1}^{s_2} k(s) ds \geq \varphi$, 这里的 s_1, s_2 分别是 P_1, P_2 所对应的曲线弧长, $s_1 < s_2$. 等号只限于 O 是平面凸曲线时成立.

证明 作曲线 O 的单位切向量的球面标线, 即切线的球面标

线, 那么,

$$\int_{s_1}^{s_2} k(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left| \frac{dT(s)}{ds} \right| ds,$$

为切线的球面标线之长 $\tilde{L}$. 显然, $\tilde{L}$ 大于等于经过这标线起点与终点的大圆劣弧的长, 而大圆劣弧的长就是起终点处两单位切向量的夹角 φ . 等号成立时, $T(s)$ 处处位于这段大圆劣弧内, 所以 O 是平面凸曲线.

有了上面这些预备知识, 现在可以来证明定理了.

定理的证明 令

$$G = \int_O k(s) ds + \varphi_1 + \dots + \varphi_n. \quad (2)$$

在 O 上适当取两点 P_1^*, P_2^* , 分 O 为两曲线弧 O_1, O_2 , 使得 O_1 的全曲率加上在 O_1 上所有外角总和等于 $\frac{1}{2} G$ (必要时分一个外角为两个外角). 记 O 在这两个分点的单位切向量为 T_1, T_2 (可能 T_2 落在某 (T_{m+1}) 内, 这种情况最后证明), 由引理前所述的预备知识知道, 在 (Σ) 内有一单位向量 T_2 , 使得

$$\langle T_1, T_2 \rangle + \langle T_2, T_3 \rangle = \sigma.$$

下面分两种情况讨论:

(i) 若 T_2 是 O 的单位切向量, 不妨设它的切点所在的曲线段为 O_1 , 在 O_1 内的所有外角记为 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. 记 T_1, T_2, T_3 的各切点所对应的弧长为 s_1^*, s_2^*, s_3^* ($0 \leq s_1^* < s_2^* < s_3^* \leq L$, L 是 O 的长), 则

$$\frac{1}{2} G = \int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds + \varphi_1 + \dots + \varphi_m.$$

若记顶点 A_i 处的两个单位切向量顺次为 p_i, q_i , 则 $\varphi_i = \langle p_i, q_i \rangle$. 不妨设 T_2 的切点在点 P_1^* 和 A_1 之间, 记顶点 A_1 所对应的弧长为 s_1 , 那么

$$\int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds = \int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds + \int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds + \int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds + \dots + \int_{s_m}^{s_2^*} k(s) ds.$$

利用引理,有

$$\int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds \geq \langle T_1, T_2 \rangle + \langle T_2, p_1 \rangle + \langle q_1, p_2 \rangle + \dots + \langle q_m, T_3 \rangle.$$

因此,注意到(1),可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G &\geq \langle T_1, T_2 \rangle + \langle T_2, p_1 \rangle + \langle q_1, p_2 \rangle + \dots + \langle q_m, T_3 \rangle \\ &\quad + \langle p_1, q_1 \rangle + \langle p_2, q_2 \rangle + \dots + \langle p_m, q_m \rangle \\ &= \langle T_1, T_2 \rangle + \langle T_2, p_1 \rangle + \langle p_1, q_1 \rangle + \langle q_1, p_2 \rangle \\ &\quad + \langle p_2, q_2 \rangle + \dots + \langle p_m, q_m \rangle + \langle q_m, T_3 \rangle \\ &\geq \langle T_1, T_2 \rangle + \langle T_2, T_3 \rangle = \sigma. \end{aligned}$$

于是

$$G \geq 2\sigma.$$

将它代入(2),有

$$\int_{\sigma}^{s_2^*} k(s) ds + \sum_{i=1}^n (\sigma - \theta_i) \geq 2\sigma,$$

此即

$$\int_{\sigma}^{s_2^*} k(s) ds \geq \sum_{i=1}^n \theta_i - (n-2)\sigma. \quad (3)$$

(ii) 若 T_2 不是 O 的切向量,不妨设它属于 (T_1) , 则

$$\int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds = \int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds + \int_{s_1}^{s_2^*} k(s) ds + \dots + \int_{s_m}^{s_2^*} k(s) ds.$$

根据引理,有

$$\int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds \geq \langle T_1, p_1 \rangle,$$

$$\int_{s_1}^{s_2^*} k(s) ds \geq \langle q_1, p_2 \rangle,$$

...

$$\int_{s_m}^{s_2^*} k(s) ds \geq \langle q_m, T_3 \rangle.$$

因为

$$\varphi_1 = \langle p_1, q_1 \rangle = \langle p_1, T_2 \rangle + \langle T_2, q_1 \rangle,$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G &= \int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds + \varphi_1 + \dots + \varphi_m \\ &\geq \langle T_1, p_1 \rangle + \langle q_1, p_2 \rangle + \dots + \langle q_m, T_3 \rangle \\ &\quad + \langle p_1, T_2 \rangle + \langle T_2, q_1 \rangle + \langle p_2, q_2 \rangle \\ &\quad + \dots + \langle p_m, q_m \rangle \\ &= \langle \langle T_1, p_1 \rangle + \langle p_1, T_2 \rangle + \langle T_2, q_1 \rangle + \langle q_1, p_2 \rangle \\ &\quad + \langle p_2, q_2 \rangle + \dots + \langle p_m, q_m \rangle + \langle q_m, T_3 \rangle \rangle \\ &\geq \langle T_1, T_2 \rangle + \langle T_2, T_3 \rangle = \sigma. \end{aligned} \quad (4)$$

因此这时仍有 $G \geq 2\sigma$ 和不等式(3)成立. 如果 T_3 落在某 (T_{m+1}) ,

内, 即 $s_3^* = s_{m+1}$, $\frac{1}{2} G = \int_{s_1^*}^{s_2^*} k(s) ds + \varphi_1 + \dots + \varphi_m + \langle p_{m+1}, T_3 \rangle$, 在

上述证明中把 $\langle q_m, T_3 \rangle$ 项改为 $\langle q_m, p_{m+1} \rangle$, 结论仍然成立. 证毕.

注 如果曲线 O 是光滑的, 则每个“顶点”处的内角 $\theta_i - \sigma$ ($1 \leq i \leq n$). 于是从本节定理结论容易导出著名的 Fenchel 定理: 任

何一条空间简单正则闭曲线 O 的全曲率

$$\int_0^L k(s) ds \geq 2\pi,$$

而且等号在且仅在 O 为平面凸闭曲线时成立.

第三章 曲面的局部几何性质

§1 切平面

已知一个曲面, 求过这曲面上已知点的切平面方程, 一般比较简单, 下面三个例子是有关曲面的切平面的习题中比较难的.

例 26 已知曲面 $r(u, v) = (u^3 \sin^3 v, u^3 \cos^3 v, (a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}})$ 这里 a 是正常数, $0 < u < a$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$. 求证: 过这曲面上每一的切平面与三个坐标轴相交而得的三条截距的平方和是一常数. 证明 因为

$$r_u = (3u^2 \sin^3 v, 3u^2 \cos^3 v, -3u(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}),$$

$$r_v = (3u^3 \sin^2 v \cos v, -3u^3 \cos^2 v \sin v, 0),$$

所以, 过这曲面上每一点的切平面的单位法向量

$$\begin{aligned} n &= \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \\ &= \frac{1}{(a^2 - u^2 + u^2 \sin^2 v \cos^2 v)^{\frac{1}{2}}} (- (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} \cos v, \\ &\quad - (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} \sin v, -u \sin v \cos v). \end{aligned}$$

相应的切平面方程是

$$\begin{aligned} (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} \cos v (x - u^3 \sin^3 v) + (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} \sin v (y - u^3 \cos^3 v) \\ + u \sin v \cos v (z - (a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

从(1), 我们有

$$\begin{aligned} (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} x \cos v + (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} y \sin v + u z \sin v \cos v \\ = a^2 (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} u \sin v \cos v, \end{aligned}$$

于是, 这切平面方程可改写为

$$\frac{x}{u \sin v} + \frac{y}{u \cos v} + \frac{z}{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = a^2. \quad (2)$$

明显地, 这切平面与 x 轴的交点是 $(a^2 u \sin v, 0, 0)$, 与 y 轴的交点是 $(0, a^2 u \cos v, 0)$, 与 z 轴的交点是 $(0, 0, a^2 (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}})$. 那么, 这切平面与三个坐标轴相交而得的三条截距的平方和和自然就是

$$(a^2 u \sin v)^2 + (a^2 u \cos v)^2 + a^4 (a^2 - u^2) = a^4. \quad (3)$$

证毕.

例 27 已知曲面 $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, a \sin 2v)$, 这里 a 是正常数, $u > 0$, $0 < v < \frac{\pi}{4}$. 求证: 过这曲面的每一点的切平面交曲面本身于一条射线或一段椭圆曲线.

证明 从 $r_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $r_v = (-u \sin v, u \cos v, 2a \cos 2v)$ 知道, 过曲面上一定点 $P^* (u^* \cos v^*, u^* \sin v^*, a \sin 2v^*)$ 的切平面的单位法向量

$$\begin{aligned} n &= \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \\ &= \frac{1}{\Delta} (2a \sin v^* \cos 2v^*, -2a \cos v^* \cos 2v^*, u^*), \end{aligned}$$

这里 $\Delta = (4a^2 \cos^2 2v^* + u^{*2})^{\frac{1}{2}}$. 于是, 过曲面上 P^* 点的切平面方程是

$$\begin{aligned} 2a \sin v^* \cos 2v^* (x - u^* \cos v^*) - 2a \cos v^* \cos 2v^* \\ \cdot (y - u^* \sin v^*) + u^* (z - a \sin 2v^*) \\ = 0. \end{aligned}$$

从上式, 有

$$2a \sin v^* \cos 2v^* x - 2a \cos v^* \cos 2v^* y + u^* z = a u^* \sin 2v^*. \quad (1)$$

要求这切平面与曲面的交线, 我们用 $x=u \cos v, y=u \sin v, z=a \sin 2v$ 代入(1), 就有

$$\sin(v^*-v)[u \cos 2v^*-u^* \cos(v+v^*)]=0. \quad (2)$$

等式(2)有两种情况, 第一种情况是

$$\sin(v^*-v)=0. \quad (3)$$

于是, 我们有

$$v=v^*+k\pi \quad (k \text{ 是某个整数}). \quad (4)$$

这交线的向量形式是 $((-1)^k u \cos v^*, (-1)^k u \sin v^*, a \sin 2v^*)$, 它表示平面 $z=a \sin 2v^*$ 上一条射线。

第二种情况是

$$\sin(v^*-v) \neq 0. \quad (5)$$

从(2)和(5), 有

$$u \cos 2v^*=u^* \cos(v+v^*). \quad (6)$$

于是, 这交线的向量形式 (x, y, z) 由下述公式确定

$$\begin{cases} x = \frac{u^*}{\cos 2v^*} \cos(v+v^*) \cos v, \\ y = \frac{u^*}{\cos 2v^*} \cos(v+v^*) \sin v, \\ z = a \sin 2v. \end{cases} \quad (7)$$

由于

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{u^{*2}}{\cos^2 2v^*} \cos^2(v+v^*) \\ &= \frac{u^*}{\cos 2v^*} (x \cos v^* - y \sin v^*) \end{aligned} \quad (8)$$

从(8)可以知道, 这交线在一个圆柱面上, 因而这交线是圆柱面和平面的部分交线, 必为一段椭圆曲线。证毕。

例 28 (Beltrami 定理) 若用挠曲线在一点 P 处的密切平面去截这挠曲线的切线面, 所得的平面曲线在 P 处的曲率等于原挠

曲线在 P 点的曲率的 $\frac{3}{4}$ 。

证明 设 $P=(0, 0, 0)$, 在 P 点的从法向量(又称副法向量) $B(P)=(0, 0, 1)$ 。那么, 过 P 点的密切平面方程是 $z=0$ 。设挠曲线 O 的向量形式是 $\rho(s)=(x(s), y(s), z(s))$, 这里 s 是 O 的弧长, 并设在 P 点, $s=0$ 。这时,

$$T(s) = \left(\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, \frac{dz(s)}{ds} \right),$$

$$k(s)N(s) = \left(\frac{d^2x(s)}{ds^2}, \frac{d^2y(s)}{ds^2}, \frac{d^2z(s)}{ds^2} \right).$$

由于 $T(0), N(0)$ 张成 P 点的密切平面 $z=0$, 所以, 我们有

$$\frac{dz(s)}{ds} \Big|_{s=0} = 0, \quad \frac{d^2z(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = 0. \quad (1)$$

又由于挠曲线 O 在 P 点的挠率 $\tau(0) \neq 0$, 那么, 从空间曲线的挠率计算公式, 有

$$\frac{d^2z(s)}{ds^3} \Big|_{s=0} \neq 0. \quad (2)$$

我们旋转 x 轴及 y 轴, 使得

$$\frac{dx(s)}{ds} \Big|_{s=0} = 1, \quad \frac{dy(s)}{ds} \Big|_{s=0} = 0,$$

再利用 $T(0) \cdot N(0) = 0$, 有

$$\frac{d^2x(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = 0.$$

曲线 O 在 P 点的曲率

$$k(0) = \left| \frac{d^2y(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} \right|. \quad (3)$$

挠曲线 O 的切线面方程是

$$\begin{aligned} r(s, v) &= \rho(s) + vT(s) \\ &= (x(s), y(s), z(s)) + v \left(\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, \frac{dz(s)}{ds} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

在(4)中, $v > 0$, 这切线面与平面 $z=0$ 的交线 O^* 应当满足

$$z(s) + v \frac{dz(s)}{ds} = 0. \quad (5)$$

这样, 平面曲线 O^* 的向量形式是

$$\mathbf{r}^*(s) = (x(s), y(s), 0)$$

$$-\frac{z(s)}{\frac{dz(s)}{ds}} \left(\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, 0 \right), \quad (6)$$

注意, (6) 中 s 仅是曲线 O^* 的参数.

$$\frac{d\mathbf{r}^*(s)}{ds}$$

$$= \left(\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, 0 \right)$$

$$- \left[1 - \frac{z(s)}{\left(\frac{dz(s)}{ds} \right)^2} \frac{d^2z(s)}{ds^2} \right] \left(\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, 0 \right)$$

$$- \frac{z(s)}{\frac{dz(s)}{ds}} \left(\frac{d^2x(s)}{ds^2}, \frac{d^2y(s)}{ds^2}, 0 \right)$$

$$= \frac{z(s)}{\left(\frac{dz(s)}{ds} \right)^2} \frac{d^2z(s)}{ds^2} \left(\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, 0 \right)$$

$$- \frac{z(s)}{\frac{dz(s)}{ds}} \left(\frac{d^2x(s)}{ds^2}, \frac{d^2y(s)}{ds^2}, 0 \right). \quad (7)$$

利用 Taylor 展开, 和 $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ 在 $s=0$ 处的各阶导数情况, 可以看到

$$\begin{cases} x(s) = s + o(s^2), \\ y(s) = \frac{1}{2} \frac{d^2y(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} s^2 + o(s^2), \\ z(s) = \frac{1}{6} \frac{d^3z(s)}{ds^3} \Big|_{s=0} s^3 + o(s^3). \end{cases} \quad (8)$$

这里及后面的 $o(s^n)$ ($n=1, 2, 3$) 满足

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{o(s^n)}{s^n} = 0.$$

从(8)的第三式, 两端对 s 求导, 我们有

$$\frac{dz(s)}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d^3z(s)}{ds^3} \Big|_{s=0} s^2 + o(s^2),$$

$$\frac{d^2z(s)}{ds^2} = \frac{d^3z(s)}{ds^3} \Big|_{s=0} s + o(s). \quad (9)$$

于是,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{z(s)}{\left(\frac{dz(s)}{ds} \right)^2} \frac{d^2z(s)}{ds^2} = \frac{2}{3}. \quad (10)$$

利用(7)、(8)、(9)和(10), 我们有

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{r}^*(s)}{ds} = \left(\frac{2}{3}, 0, 0 \right). \quad (11)$$

(7) 两端对 s 求导, 有

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\mathbf{r}^*(s)}{ds^2} \\ &= \frac{d}{ds} \left[\frac{z(s)}{\left(\frac{dz(s)}{ds} \right)^2} \frac{d^2z(s)}{ds^2} \right] \left(\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, 0 \right) \\ &+ \frac{z(s)}{\left(\frac{dz(s)}{ds} \right)^2} \frac{d^2z(s)}{ds^2} \left(\frac{d^2x(s)}{ds^2}, \frac{d^2y(s)}{ds^2}, 0 \right) \\ &- \left[1 - \frac{z(s)}{\left(\frac{dz(s)}{ds} \right)^2} \frac{d^2z(s)}{ds^2} \right] \left(\frac{d^2x(s)}{ds^2}, \frac{d^2y(s)}{ds^2}, 0 \right) \\ &- \frac{z(s)}{\frac{dz(s)}{ds}} \left(\frac{d^3x(s)}{ds^3}, \frac{d^3y(s)}{ds^3}, 0 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

(8) 的第二式两端对 s 求导, 有

$$\frac{dy(s)}{ds} = \frac{d^2y(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} s + o(s). \quad (13)$$

那么,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{3}, 0, 0 \right) \times \left(\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, 0 \right) \\ &= \left(0, 0, \frac{2}{3} \frac{dy(s)}{ds} \right) \\ &= \left(0, 0, \frac{2}{3} \frac{d^2y(s)}{ds^2} \right)_{s=0} s + o(s). \end{aligned} \quad (14)$$

利用(8)和(9),

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{d}{ds} \left[\frac{z(s)}{\left(\frac{dz(s)}{ds} \right)^2} \frac{d^2z(s)}{ds^2} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{\frac{d^2z(s)}{ds^2}}{\frac{dz(s)}{ds}} - \frac{2z(s)}{\left(\frac{dz(s)}{ds} \right)^3} \left(\frac{d^2z(s)}{ds^2} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{z(s)}{\left(\frac{dz(s)}{ds} \right)^2} \frac{d^3z(s)}{ds^3} \right] \\ &= 2 - \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

从(8)的第三式和(9)的第一式,有

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{z(s)}{\frac{dz(s)}{ds}} = 0.$$

利用(10)、(11)、(12)、(14)、(15)、(16)和(8),我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{d\gamma^*(s)}{ds} \times \frac{d^2\gamma^*(s)}{ds^2} \right] \\ &= \left(\frac{2}{3}, 0, 0 \right) \times \frac{1}{3} \left(0, \frac{d^2y(s)}{ds^2} \right)_{s=0}, \\ &= \frac{2}{9} \left(0, 0, \frac{d^2y(s)}{ds^2} \right)_{s=0}. \end{aligned} \quad (17)$$

那么,平面曲线 O^* 在 P 点的曲率

$$\begin{aligned} k^*(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{d\gamma^*(s)}{ds} \right| \times \frac{d^2\gamma^*(s)}{ds^2}}{\left| \frac{d\gamma^*(s)}{ds} \right|^3} \\ &= \frac{3}{4} \left| \frac{d^2y(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = \frac{3}{4} |k(0)|. \end{aligned} \quad (18)$$

证毕.

§ 2 包络与可展曲面

我们知道,无奇点的单参数曲面族 $F(x, y, z, \lambda) = 0$ (λ 是参数)的包络面可从方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z, \lambda) = 0, \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}$$

消去参数 λ 而得到.

类似地, xy 平面上无奇点的单参数曲线族 $F(x, y, \lambda) = 0$ (λ 是参数)的包络线也可从方程组

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0, \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

消去 λ 而得到.

关于求包络的一般习题,难点在于用适当方法消去参数 λ . 有时,如果消去 λ 有困难,就用参数形式写出包络线或包络面.

例 29 在平面上,求通过坐标原点并且中心在圆周 $O: (x-a)^2 + y^2 = R^2$ 上的点的圆周族的包络. 这里 a, R 都是正常数.

解 在圆周 O 上任取一点 (x^*, y^*) , 以 (x^*, y^*) 为中心, 而且通过坐标原点的圆是

$$(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 = x^{*2} + y^{*2}, \quad (1)$$

上面的 (x^*, y^*) 满足

$$(x^* - a)^2 + y^{*2} = R^2.$$

首先,我们要想办法从(1)、(2)中消去一个参数,从(1),有

$$x^2 + y^2 - 2x^*x = 2y^*y.$$

上式两端平方,再利用(2),有

$$(x^2 + y^2 - 2x^*x)^2 = 4y^{*2} [R^2 - (x^* - a)^2].$$

方程(3)是单参数曲线族方程. 将方程(3)对参数 x^* 求导,有

$$-4(x^2 + y^2 - 2x^*x)x = -8y^2(x^* - a),$$

于是,

$$(x^2 + y^2 - 2x^*x)x = 2y^2(x^* - a).$$

从(4)可以得到

$$x^* = \frac{x}{2} + \frac{ay^2}{x^2 + y^2},$$

把(5)代入(3),我们有

$$\begin{aligned} & \left[x^2 + y^2 - 2x \left(\frac{x}{2} + \frac{ay^2}{x^2 + y^2} \right) \right]^2 \\ &= 4y^2 \left[R^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{ay^2}{x^2 + y^2} - a \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

将上式左、右两端,分别由直接计算,可以得到

$$\begin{aligned} & \left[x^2 + y^2 - 2x \left(\frac{x}{2} + \frac{ay^2}{x^2 + y^2} \right) \right]^2 \\ &= \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} (x^2 + y^2 - 2ax)^2, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & 4y^2 \left[R^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{ay^2}{x^2 + y^2} - a \right)^2 \right] \\ &= 4y^2 \left[R^2 - \frac{x^2}{4(x^2 + y^2)^2} (x^2 + y^2 - 2ax)^2 \right]. \end{aligned}$$

把(7)、(8)代入(6),有

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4R^2(x^2 + y^2), \quad (9)$$

这就是所求包络线的方程. 解毕.

例 30 求平面族 $x \cos \lambda + y \sin \lambda - z \sin \lambda = 1$ 的包络面, 这里 λ 是参数, 并证明这包络面是一个柱面.

解 对参数 λ 微分, 有

$$-x \sin \lambda + y \cos \lambda - z \cos \lambda = 0. \quad (1)$$

平面族方程两端乘以 $\cos \lambda$, (1)式两端乘以 $\sin \lambda$, 然后相减,

有

$$x = \cos \lambda; \quad (2)$$

平面族方程两端乘以 $\sin \lambda$, (1)式两端乘以 $\cos \lambda$, 然后相加, 有

$$y - z = \sin \lambda. \quad (3)$$

(2)的平方再加上(3)的平方, 有

$$x^2 + (y - z)^2 = 1, \quad (4)$$

这就是所求包络面的方程.

令

$$\begin{cases} y^* = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - z), \\ z^* = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z), \end{cases} \quad (5)$$

这表明 y 轴与 z 轴进行了旋转, 得到了新的 y^* 轴与 z^* 轴, 代入(4), 我们有

$$x^2 + 2y^{*2} = 1. \quad (6)$$

从(6)可以知道, (4)代表的曲面是椭圆柱面. 解毕.

例 31 找一个可展曲面, 使它通过以下两条曲线

$$(i) \ y^2 = 4ax \ (y > 0), \ z = 0;$$

$$(ii) \ x^2 = 4ay \ (x > 0), \ z = b \ (a, b \text{ 是正常数}).$$

解 我们知道单参数平面族的包络面是一个可展曲面. 因此, 我们引入一个单参数平面族 T_λ ;

$$\lambda x + A(\lambda)y + B(\lambda)z + D(\lambda) = 0. \quad (1)$$

这里 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 和 $D(\lambda)$ 都是 λ 的待定可微函数.

对于固定的 λ , 要求平面 T_λ 与抛物线

$$r(t) = \left(\frac{t^2}{4a}, t, 0 \right) \quad (t > 0)$$

$$\text{和} \quad r^*(s) = \left(s, \frac{s^2}{4a}, b \right) \quad (s > 0)$$

都相切. 由于

$$\frac{dr(t)}{dt} = \left(\frac{t}{2a}, 1, 0 \right), \quad \frac{dr^*(s)}{ds} = \left(1, \frac{s}{2a}, 0 \right). \quad (2)$$

那么, 平面 T_λ 的法向量 $(\lambda, A(\lambda), B(\lambda))$ 应当与 (2) 中两向量都垂直, 从而有

$$\frac{t\lambda}{2a} + A(\lambda) = 0, \quad (3)$$

$$\lambda + \frac{s}{2a} A(\lambda) = 0. \quad (4)$$

在上述 (3) 和 (4) 中, t , s 都是某个确定值. 因为对于同一个 t 和 s , 点 $\left(\frac{t^2}{4a}, t, 0 \right)$ 和 $\left(s, \frac{s^2}{4a}, b \right)$ 都应当在平面 T_λ 上, 那么, 还应当有

$$\frac{t^2\lambda}{4a} + A(\lambda)t + D(\lambda) = 0. \quad (5)$$

$$\lambda s + \frac{s^2}{4a} A(\lambda) + bB(\lambda) + D(\lambda) = 0. \quad (6)$$

等式 (3)、(4)、(5) 和 (6) 共有 5 个未知量 t , s , $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 和 $D(\lambda)$. (3) 两端乘以 t , 代入 (5), 有

$$D(\lambda) = \frac{\lambda t^2}{4a}. \quad (7)$$

从 (3)、(4) 可得

$$A(\lambda) = -\frac{\lambda t}{2a} = -\frac{2a\lambda}{s}. \quad (8)$$

把 (7)、(8) 代入 (6), 我们有

$$B(\lambda) = -\frac{\lambda}{2b} \left(s + \frac{t^2}{2a} \right). \quad (9)$$

由于只要求出一个可展曲面, 不妨令

$$s = \lambda. \quad (10)$$

那么, 从 (7)、(8)、(9) 可推出

$$t = \frac{4a^2}{\lambda}, \quad (11)$$

$$A(\lambda) = -2a, \quad (12)$$

$$B(\lambda) = -\frac{1}{2b} \left(\lambda^2 + \frac{8a^3}{\lambda} \right), \quad (13)$$

$$D(\lambda) = \frac{4a^3}{\lambda}. \quad (14)$$

将上述等式代入 (1), 有

$$\lambda x - 2ay - \frac{1}{2b} \left(\lambda^2 + \frac{8a^3}{\lambda} \right) z + \frac{4a^3}{\lambda} = 0. \quad (15)$$

这里的参数 $\lambda \in (0, \infty)$. 下面来求单参数平面族 (15) 的包络. 对参数 λ 求导, 有

$$x - \frac{1}{b} \left(\lambda - \frac{4a^3}{\lambda^2} \right) z - \frac{4a^3}{\lambda^2} = 0. \quad (16)$$

上式两端乘以 λ , 有

$$\lambda x - \frac{1}{b} \left(\lambda^2 - \frac{4a^3}{\lambda} \right) z - \frac{4a^3}{\lambda} = 0. \quad (17)$$

将 (15) 和 (17) 相加, 有

$$2\lambda x - 2ay - \frac{3}{2b} \lambda^2 z = 0. \quad (18)$$

我们用 λ , z 作为包络曲面的参数, 解由 (15) 和 (18) 组成的关于 x , y 的线性方程组, 有

$$\begin{cases} x = \frac{1}{b} \lambda z + \frac{4a^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{z}{b}\right), \\ y = \frac{\lambda^2 z}{4ab} + \frac{4a^2}{\lambda} \left(1 - \frac{z}{b}\right). \end{cases} \quad (1)$$

于是,我们就有一个可展曲面

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\lambda, z) = & \left(\frac{1}{b} \lambda z + \frac{4a^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{z}{b}\right), \right. \\ & \left. \frac{\lambda^2 z}{4ab} + \frac{4a^2}{\lambda} \left(1 - \frac{z}{b}\right), z \right). \quad (\lambda > 0) \end{aligned} \quad (2)$$

显然,由于

$$\mathbf{r}(\lambda, 0) = \left(\frac{4a^2}{\lambda^2}, \frac{4a^2}{\lambda}, 0 \right)$$

的直角坐标

$$x = \frac{4a^2}{\lambda^2}, \quad y = \frac{4a^2}{\lambda}, \quad z = 0$$

满足 $y^2 = 4ax$ ($y > 0$), 即 $\mathbf{r}(\lambda, 0)$ 恰为第一条曲线. 而

$$\mathbf{r}(\lambda, b) = \left(\lambda, \frac{\lambda^2}{4a}, b \right)$$

则恰为第二条曲线. 因此, 曲面 (20) 即为所求曲面. 解毕.

一般微分几何书上讲单参数曲面族的包络时, 曲面族方程是用 $F(x, y, z, \lambda) = 0$ 来表示. 我们知道曲面的参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

自然地, 可设无奇点曲面族 $\{S_\lambda\}$ 的参数方程是

$$\begin{cases} x = x(u, v, \lambda), \\ y = y(u, v, \lambda), \\ z = z(u, v, \lambda), \end{cases} \quad (1)$$

这里, $\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}$ 在定义域内每一点都不全为零.

在上述表示式下, 怎样来计算这曲面族的包络呢?

设包络面 S 上点 (x, y, z) 属于曲面族中某一曲面 S_λ , 因此 S 上每点对应 λ 的一个确定值, 即 λ 是 (x, y, z) 的函数, 而 x, y, z 都是 u, v 的函数, 故可记 λ 为 $\lambda(u, v)$. 假定在 S 上, $\lambda(u, v)$ 不是常数, 否则包络面 S 将整个地属于曲面族中某一曲面, 这是我们不感兴趣的情况. 因此, 我们只考虑 $\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \frac{\partial \lambda}{\partial v}$ 不全为零的情况.

于是曲面 S 有向量形式

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) = & (x(u, v, \lambda(u, v)), y(u, v, \lambda(u, v)), \\ & z(u, v, \lambda(u, v))). \end{aligned} \quad (2)$$

在固定点 $(x(u_0, v_0, \lambda(u_0, v_0)), y(u_0, v_0, \lambda(u_0, v_0)), z(u_0, v_0, \lambda(u_0, v_0)))$, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u = & \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right), \\ \mathbf{r}_v = & \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right), \\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = & \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ & + \left[\frac{\partial \lambda}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] \\ & \times \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

上式右端在 $u=u_0, v=v_0$ 处计算. 由于 S 是包络, (4) 中 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 同时是曲面 $S_{\lambda(u_0, v_0)}$ 与 S 在点 $(x(u_0, v_0, \lambda(u_0, v_0)), y(u_0, v_0, \lambda(u_0, v_0)), z(u_0, v_0, \lambda(u_0, v_0)))$ 的法向量, 所以 (4) 中 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 应当等于 $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$ (在 $u=u_0, v=v_0$ 处

计算). 那么,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) \\ &= \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right). \end{aligned}$$

利用向量外积计算公式, 从(5), 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) &= \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) &= \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) &= \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right). \end{aligned}$$

由(6), 以及 $\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \frac{\partial \lambda}{\partial v}$ 不全为零, 有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right), \\ & \left(\frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right), \\ & \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right). \end{aligned}$$

从(7)式可得以下三个等式,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \\ &= \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \\ &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \\ & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \\ &= \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)}. \end{aligned} \quad (8)$$

由于 $\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}$ 在定义域的每一点都不全为零, 则应当

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 0. \quad (9)$$

换句话说讲, 在参数 $u = u_0, v = v_0$ 处, 我们有

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \lambda)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

又由于 $(x(u_0, v_0, \lambda(u_0, v_0)), y(u_0, v_0, \lambda(u_0, v_0)), z(u_0, \lambda(u_0, v_0)))$ 是包络面 S 上任意取定的一点, 因此, 包络面 S 上的点 (x, y, z) 要满足

$$\begin{cases} x = x(u, v, \lambda), \\ y = y(u, v, \lambda), \\ z = z(u, v, \lambda), \\ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \lambda)} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

如果从(11)中消去参数 λ 后, 能得到一个曲面 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, 我们就称这个曲面为判别曲面 Δ .

现在要说明, 如果这个判别曲面 Δ 存在, 则 Δ 就是这无奇点,

曲面族的包络面. 取 Σ 上一点 $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, 设应的 $\lambda = \lambda(u, v)$. 我们来计算 Σ 在这点的法向量, 设 (dx, dy, dz) 是 Σ 在点 $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 处的切向量, 利用 (11) 的四式和向量 $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$ 与 $(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$ 的线性无关性则必有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}\right) = a\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) + b\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right), \quad (12)$$

这里 a, b 是 (u, v) 的函数.

微分 (11) 的前三式, 有

$$(dx, dy, dz) = (du + a d\lambda)\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) + (dv + b d\lambda)\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right). \quad (13)$$

于是, Σ 上点 $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 的切平面的法向量是 $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$, 当然可以相差一个非零常数倍, 这恰是曲面族中曲面 $S_{\lambda(u, v)}$ 的法向量, 因此, Σ 的确是曲面族 $\{S_{\lambda}\}$ 的包络.

上面的叙述证明了下例中的结果.

例 32 无奇点曲面族 S_{λ} :

$$\begin{cases} x = x(u, v, \lambda), \\ y = y(u, v, \lambda), \\ z = z(u, v, \lambda) \end{cases}$$

的包络面方程是

$$\begin{cases} x = x(u, v, \lambda), \\ y = y(u, v, \lambda), \\ z = z(u, v, \lambda), \\ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \lambda)} = 0. \end{cases}$$

• 60 •

显然, 例 32 有不少应用. 解毕.

例 33 设 $n(s)$ 为沿一条挠曲线 $Or = r(s)$ 定义的单位法向量场, 这里 S 是曲线 O 的弧长, $0 \leq s \leq L$. 问直线面 $S: r(s, v) = r(s) + vn(s)$ 是否有可能为可展曲面?

解 同前面一样, 用 $T(s), N(s), B(s)$ 表示挠曲线 O 的 Frenet 标架, 用 $k(s), \tau(s)$ 分别表示 O 的曲率和挠率.

$$n(s) = \cos \theta(s) N(s) + \sin \theta(s) B(s), \quad (1)$$

这里可设 $\theta(s)$ 为 s 的连续可微函数. 这时,

$$r'(s, v) = r'(s) + v(\cos \theta(s) N'(s) + \sin \theta(s) B'(s)). \quad (2)$$

显然

$$\frac{dr'(s)}{ds} = T'(s),$$

$$\frac{dn(s)}{ds}$$

$$= -k(s) \cos \theta(s) T'(s)$$

$$- \left(\frac{d\theta(s)}{ds} + \tau(s) \right) (\sin \theta(s) N'(s) - \cos \theta(s) B'(s)). \quad (3)$$

从而 S 可展的充要条件

$$\left(\frac{dr'(s)}{ds}, n(s), \frac{dn(s)}{ds} \right) = 0$$

化为

$$\begin{aligned} & (T(s), \cos \theta(s) N'(s) + \sin \theta(s) B'(s), -k(s) \cos \theta(s) T'(s) \\ & - \left(\frac{d\theta(s)}{ds} + \tau(s) \right) (\sin \theta(s) N'(s) - \cos \theta(s) B'(s)) \\ & = 0. \end{aligned}$$

从上式可得

$$\frac{d\theta(s)}{ds} + \tau(s) = 0. \quad (4)$$

因而

$$\theta(s) = \int_0^s \tau(t) dt + \theta_0 \quad (\theta_0 \text{ 是常数}) \quad (5)$$

明显地, 由 (5) 定义的 $\theta(s)$ 和由 (1) 定义的单位法向量场 $n(s)$

• 61 •

保证直纹面 $S: \mathbf{r}(s, v) = \rho(s) + v\mathbf{n}(s)$ 是可展曲面. 解毕.

§ 3 曲面的基本公式与基本方程

曲面论中的 Gauss 公式和 Weingarten 公式是曲面论中的基本公式, 而 Gauss 方程和 Codazzi 方程是曲面论中的基本方程. 在证明曲面论基本定理时我们已经知道, 如果把曲面论的基本公式看作所讨论曲面的向量表示 $\mathbf{r}$ 与其单位法向量 $\mathbf{n}$ 应该满足的偏微分方程组, 那么, 曲面论基本方程就是上述偏微分方程组的可积条件. 所以, 基本方程反映了基本公式中出现的由第一、第二基本形式系数及其导数必须满足的一些约束条件. 我们知道, 曲面的内蕴性质由曲面的第一基本形式完全决定, 而曲面在欧氏空间中的弯曲程度, 则是由第二基本形式描述的. 曲面论的基本方程说明了这两个基本形式完全确定了一张曲面, 只允许相差一个运动. 这些基本公式和基本方程在曲面论中的这种重要地位, 确定它们有许多应用. 下面举六个例题.

例 34 求证 平均曲率 H 为常数的无脐点曲面 S 的第一、二基本形式可由下式给出:

$$I = \lambda(u^*, v^*) (du^{*2} + dv^{*2}),$$

$$II = [1 + \lambda(u^*, v^*) H] du^{*2} - [1 - \lambda(u^*, v^*) H] dv^{*2}.$$

证明 曲面 S 是无脐点曲面, 所以可取曲率线网为参数曲线网, 这时, 曲面 S 的第一、二基本形式系数中 $F=0, M=0$. 两个 Codazzi 方程简化为

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{\sqrt{E}}\right)_v - \frac{N}{G}(\sqrt{E})_v &= 0, \\ \left(\frac{N}{\sqrt{G}}\right)_u - \frac{L}{E}(\sqrt{G})_u &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

记 k_1, k_2 为曲面 S 的两个主曲率. 由于 S 无脐点, 不妨设 $k_1 > k_2$. 于是 $L = k_1 E, N = k_2 G, k_1 + k_2 = 2H$,

从(1)可得

$$\begin{aligned} (k_1 \sqrt{E})_v &= k_2 (\sqrt{E})_v, \\ (k_2 \sqrt{G})_u &= k_1 (\sqrt{G})_u. \end{aligned} \quad (2)$$

那么,

$$\begin{aligned} L_v &= (k_1 \sqrt{E} \sqrt{E})_v = (k_1 \sqrt{E})_v \sqrt{E} + k_1 \sqrt{E} (\sqrt{E})_v \\ &= k_2 (\sqrt{E})_v \sqrt{E} + k_1 \sqrt{E} (\sqrt{E})_v \\ &= 2H \sqrt{E} (\sqrt{E})_v = H E_v. \end{aligned} \quad (3)$$

类似(3)的推导, 我们有

$$N_u = H G_u. \quad (4)$$

在本题, H 是常数, 关于变量 v 积分(3), 有

$$L = H E + \varphi(u); \quad (5)$$

关于变量 u 积分(4), 有

$$N = H G + \psi(v), \quad (6)$$

这里 $\varphi(u)$ 是 u 的可微分函数, 与 v 无关; $\psi(v)$ 是 v 的可微分函数, 与 u 无关. 从(5)和(6), 可以看到

$$k_1 = \frac{L}{E} = H + \frac{\varphi(u)}{E}, \quad (7)$$

$$k_2 = \frac{N}{G} = H + \frac{\psi(v)}{G}. \quad (8)$$

由于 $k_1 > k_2$, 则 $k_1 > H > k_2$, 从(7)和(8), 有 $\varphi(u) > 0, \psi(v) < 0$. 将(7)和(8)相加, 利用 $k_1 + k_2 = 2H$, 我们有

$$\frac{\varphi(u)}{E} + \frac{\psi(v)}{G} = 0. \quad (9)$$

令

$$E(u, v) = \rho(u, v) \varphi(u), \quad (10)$$

这里 $\rho(u, v) > 0$. 从(9), 有

$$G(u, v) = -\rho(u, v) \psi(v). \quad (11)$$

不妨设点 $(0, 0)$ 在 u, v 定义域内, 又令

$$u^* = \int_0^u \sqrt{\varphi(t)} dt, \quad v^* = \int_0^v \sqrt{-\psi(t)} dt. \quad (12)$$

于是,

$$du^* = \sqrt{\varphi(u)} du, \quad dv^* = \sqrt{-\psi(v)} dv. \quad (13)$$

$$\frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(u, v)} = \sqrt{\varphi(u)} \sqrt{-\psi(v)} > 0. \quad (14)$$

u^*, v^* 是曲面 S 的新参数, 在这新参数下, 曲面 S 的第一、二基本形式

$$\begin{aligned} I &= E(u, v) du^2 + G(u, v) dv^2 \\ &= \rho(u, v) \varphi(u) du^2 - \rho(u, v) \psi(v) dv^2 \\ &= \lambda(u^*, v^*) (du^{*2} + dv^{*2}), \end{aligned} \quad (15)$$

这里 $\lambda(u^*, v^*) = \rho(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*))$.

$$\begin{aligned} I &= L(u, v) du^2 + N(u, v) dv^2 \\ &= [HE(u, v) + \varphi(u)] du^2 + [HG(u, v) + \psi(v)] dv^2 \\ &= [H\rho(u, v) + 1] \varphi(u) du^2 \\ &\quad + [-H\rho(u, v) + 1] \psi(v) dv^2 \\ &= [1 + \lambda(u^*, v^*) H] du^{*2} - [1 - \lambda(u^*, v^*) H] dv^{*2}. \end{aligned}$$

证毕.

例 35 对于平均曲率 $H = \frac{1}{2}$ 的无脐点曲面 S , 一定存在参数 u, v , 使得曲面 S 的第一、二基本形式为

$$\begin{aligned} I &= 2e^{2u} (du^2 + dv^2) \\ I &= 2e^u (\cosh w du^2 + \sinh w dv^2), \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) w + \sinh 2w &= 0. \end{aligned}$$

这里 w 是 u, v 的函数, 满足

证明 由于 $H = \frac{1}{2}$, 那么由例 34, 存在参数 u, v , 使得曲面 S 的第一、二基本形式为

$$I = \lambda(u, v) (du^2 + dv^2),$$

$$I = \left[1 + \frac{1}{2} \lambda(u, v) \right] du^2 - \left[1 - \frac{1}{2} \lambda(u, v) \right] dv^2, \quad (1)$$

这里 $\lambda(u, v) > 0$.

令

$$\lambda(u, v) = 2e^{2w(u, v)}. \quad (2)$$

那么,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} \lambda &= 1 + e^{2w} = 2e^w \cosh w, \\ \frac{1}{2} \lambda - 1 &= e^{2w} - 1 = 2e^w \sinh w. \end{aligned} \quad (3)$$

将 (2)、(3) 代入 (1), 有

$$\begin{aligned} I &= 2e^{2w} (du^2 + dv^2), \\ I &= 2e^w (\cosh w du^2 + \sinh w dv^2). \end{aligned} \quad (4)$$

于是, 曲面 S 的 Gauss 曲率 (又名总曲率)

$$\begin{aligned} K &= e^{-2w} \sinh w \cosh w \\ &= \frac{1}{2} e^{-2w} \sinh 2w. \end{aligned} \quad (5)$$

由曲面 S 的 Gauss 方程, 利用 $E = G = 2e^{2w}$, $F = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{E} \left[\left(\frac{\sqrt{E}}{E} \right)_u \right] + \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E}} \right)_v \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2w} (w_{uu} + w_{vv}). \end{aligned} \quad (6)$$

从 (5) 和 (6) 立即推出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) w + \sinh 2w = 0. \quad (7)$$

证毕.

注 对于例 35 中方程 (7) 的周期解的研究, 是本世纪八十年代初一项重要的工作, 它与非球面的常平均曲率的自相交闭曲面的存在性紧密相关.

例 36 若平移曲面 $S: \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + \mathbf{b}(v)$ 的参数曲线构成正交网, 这里 u, v 分别为曲线 $\mathbf{a}(u), \mathbf{b}(v)$ 的弧长参数, 求证: S

为柱面.

$$\text{证明} \quad r_u = \frac{d\alpha(u)}{du}, \quad r_v = \frac{db(v)}{dv}.$$

由已知条件, $F = r_u \cdot r_v = 0$, $E = r_u^2 = 1$, $G = r_v^2 = 1$. 于是曲面 S 的第一基本形式

$$(1) \quad I = du^2 + dv^2.$$

因而利用 Gauss 方程, S 的 Gauss 曲率 $K = 0$, 又由于 $r_{uv} = 0$, 则曲面 S 的第二基本形式

$$(2) \quad \mathbf{I} = L(u, v)du^2 + N(u, v)dv^2,$$

这里 $LN = 0$. 从(1)又可知曲面 S 的联络系数全为零. 如果 $L = 0$, 那么从 Gauss 公式, 有

$$(3) \quad r_{uu} = 0.$$

从而, 可以得到

$$(4) \quad \frac{d^2\alpha(u)}{du^2} = 0, \quad \alpha(u) = c_1u + c_2,$$

$$(5) \quad r(u, v) = (b(v) + c_2) + c_1u,$$

这是一个柱面的向量形式.

如果 $N = 0$, 仍然利用 Gauss 公式, 有

$$(6) \quad r_{vv} = 0.$$

那么, 类似地, 我们有

$$(7) \quad \frac{d^2b(v)}{dv^2} = 0, \quad b(v) = c_3v + c_4,$$

这里 c_3, c_4 也是两个常向量. 从而

$$(8) \quad r(u, v) = (\alpha(u) + c_4) + c_3v,$$

(8) 仍然是一个柱面的方程. 证毕.

注意, 这是一个局部的定理, 它反映的仅仅是曲面 S 的一个邻域内性质. 下面一例也是如此.

例 37 在无脐点曲面 S 的某个参数表示下, $E, F, G, L, M,$

N 都为常数, 求证: 曲面 S 为圆柱面.

证明 由于在曲面参数 u, v 表示下,

$$\begin{pmatrix} E, F \\ F, G \end{pmatrix}$$

是正定对称矩阵,

$$\begin{pmatrix} L, M \\ M, N \end{pmatrix}$$

是对称矩阵, 因此, 由线性代数知识, 存在常数可逆线性变换

$$(1) \quad w^* = au + bv, \quad v^* = cu + dv,$$

使得曲面 S 的第一、二基本形式

$$(2) \quad \mathbf{I} = dw^{*2} + dv^{*2},$$

$$\mathbf{I} = L^*dw^{*2} + N^*dv^{*2}.$$

这里 L^*, N^* 仍为常数.

由 Gauss 方程, 可得 Gauss 曲率 $K = 0$, 那么, $L^*N^* = 0$.

不妨设 $N^* = 0$, 再由正交参数下的 Gauss 公式 ($F^* = 0$), 注意到 $E^* = G^* = 1, M^* = 0$, 那么我们就有

$$(3) \quad r_{u^*v^*} = 0, \quad r_{v^*v^*} = 0.$$

因此, r_{v^*} 是常向量 l , 再关于 v^* 积分, 有

$$(4) \quad r(u^*, v^*) = lv^* + a(u^*),$$

即曲面 S 是以曲线 $a(u^*)$ 为准线, l 为直母线方向的柱面.

由于曲面 S 无脐点, 则 $L^* \neq 0$. 从(2)的第一式, 当 $v^* = 0$ 时, $l = da(u^*)$, 从(4)有 $r(u^*, 0) = a(u^*)$, 这样, 我们可以知道 u^* 是曲线 $a(u^*)$ 的弧长.

设 k_1^*, k_2^* 为曲面 S 的主曲率. 从(2)知道, u^*, v^* 为曲率线网, 且 $k_1^* = L^*, k_2^* = N^* = 0$. 利用 Rodrigues 公式.

$$(5) \quad n_{u^*} = -k_1^* r_{u^*} = -L^* r_{u^*} = -L^* \frac{da(u^*)}{du^*},$$

$$n_{v^*} = -k_2^* r_{v^*} = 0.$$

从上例能比较容易地推出下列结果.

例 38 曲面 S 的 Gauss 曲率 K 和平平均曲率 H 都是常数, 求证: 曲面 S 是平面、球面或圆柱面.

证明 由于主曲率 k_1, k_2 满足

$$k_1 + k_2 = 2H, \quad k_1 k_2 = K. \quad (1)$$

那么, k_1, k_2 必为常数. 若 $k_1 = k_2$, 曲面 S 是平面或球面, 当 $k_1 \neq k_2$ 时, S 上点非脐点, 从本节第一个例题知, 存在参数 u, v , 使得曲面 S 的第一、二基本形式分别是

$$I = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2), \quad (2)$$

$$II = [1 + \lambda(u, v)H]du^2 - [1 - \lambda(u, v)H]dv^2.$$

由于 Gauss 曲率 K 是常数, 那么

$$\frac{1}{\lambda^2}(1 + \lambda H)(\lambda H - 1) = K. \quad (3)$$

从(3), 立刻有

$$\lambda^2 = \frac{1}{H^2 - K}, \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{H^2 - K}}. \quad (5)$$

再利用(2), 可以知道曲面 S 的第一、二基本形式系数全是常数, 由上例结果, 我们知道 S 是圆柱面. 证毕.

例 39 在参数曲线网是曲率线网时, 如果无脐点曲面 S 的第二基本形式和平平均曲率 H 都是已知的, 求证: 这时曲面 S 的第二基本形式是完全确定的.

证明 无脐点曲面 S 的曲率线网为参数曲线网时, 曲面 S 的第一基本形式

$$I = E du^2 + G dv^2. \quad (1)$$

由 Gauss 方程, 曲面 S 的 Gauss 曲率

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right]_u + \left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right]_v \right\}. \quad (2)$$

因此, 曲面 S 的 Gauss 曲率 K 也是已知的. 记曲面 S 的主

由(5)的第二式可以知道

$$n = n(u^*). \quad (6)$$

再由(5)的第一式, 两端关于 u^* 积分, 有

$$n(u^*) = -L^* a(u^*) + c^*, \quad (7)$$

这里 c^* 是常向量. 从(2)的第一式, 曲面 S 的所有联络系数全为零, 再由 Gauss 公式, 有

$$r_{u^*u^*} = L^* n. \quad (8)$$

注意到(4)和(7), 我们便得到

$$\frac{d^2 a(u^*)}{du^{*2}} = -L^{*2} a(u^*) + L^* c^*. \quad (9)$$

微分上式, 有

$$\frac{d^3 a(u^*)}{du^{*3}} = -L^{*2} \frac{da(u^*)}{du^*}. \quad (10)$$

利用曲线论的 Frenet 公式, 并且注意到 u^* 是弧长参数. 那

么有

$$\frac{d^3 a(u^*)}{du^{*3}} = \frac{d}{du^*} [k^*(u^*) N(u^*)] = \frac{dk^*(u^*)}{du^*} N(u^*) + k^*(u^*) [-k^*(u^*) T(u^*) + \tau^*(u^*) B(u^*)], \quad (11)$$

这里 $T(u^*)$, $N(u^*)$, $B(u^*)$ 是曲线 $r = a(u^*)$ 的 Frenet 标架, $k^*(u^*)$, $\tau^*(u^*)$ 分别是这曲线的曲率和挠率.

将(11)代入(10), 可以推出

$$\tau^*(u^*) = 0, \quad \frac{dk^*(u^*)}{du^*} = 0, \quad k^{*2}(u^*) = L^{*2}. \quad (12)$$

那么 $k^*(u^*)$ 就是正常数 $|L^*|$, 曲线 $r = a(u^*)$ 是平面上圆周.

由于 $F^* = 0$, 则

$$0 = r_{u^*} \cdot r_{u^*} = -\frac{da(u^*)}{du^*} \cdot l = T(u^*) \cdot l, \quad (13)$$

这表明常向量 l 垂直于曲线 $a(u^*)$ 所在平面, 所以曲面 S 的确是圆柱面. 证毕.

曲率为 k_1, k_2 , 如果 $k_1 > k_2$. 利用 $k_1 + k_2 = 2H, k_1 k_2 = K$, 可以得到

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}, \quad (3)$$

即 k_1, k_2 完全确定. 这样一来, 曲面 S 的第二基本形式

$$I = k_1 E du^2 + k_2 G dv^2 \quad (4)$$

也就完全确定. 如果 $k_1 < k_2$, 我们有另一解证毕.

§ 4 渐近曲线

曲面论中的渐近曲线, 曲率线和测地线是三类重要的曲线. 本节讲有关渐近曲线的几个例题.

例 40 求曲面 $z = a\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ 上的渐近曲线, 这里 a 是正常数, $a > 0, y > 0$.

解 这个曲面的向量形式是

$$\mathbf{r}(x, y) = \left(x, y, a\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right), \quad (1)$$

依次微分, 有

$$\mathbf{r}_x = \left(1, 0, a\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)\right),$$

$$\mathbf{r}_y = \left(0, 1, a\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)\right),$$

$$\mathbf{r}_{xx} = \left(0, 0, \frac{2ay}{x^3}\right),$$

$$\mathbf{r}_{xy} = \left(0, 0, -a\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}\right)\right),$$

$$\mathbf{r}_{yy} = \left(0, 0, \frac{2ax}{y^3}\right). \quad (2)$$

因此,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \left(-a\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right), -a\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right), 1\right),$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \frac{1}{\Delta} \left(-a\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right), -a\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right), 1\right), \quad (3)$$

$$\Delta = \left[a^2 \left(\frac{x^2}{y^4} + \frac{y^2}{x^4} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) + 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

曲面的第二基本形式系数

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{xx} = \frac{2ay}{x^3 \Delta},$$

$$M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{xy} = -\frac{a}{\Delta} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right),$$

$$N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{yy} = \frac{2ax}{y^3 \Delta}. \quad (4)$$

于是曲面的渐近曲线微分方程是

$$-\frac{y}{x^3} dx^2 - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) dx dy + \frac{x}{y^3} dy^2 = 0. \quad (5)$$

将上式因式分解, 有

$$\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) \left(\frac{y}{x^2} dx - \frac{x}{y^2} dy\right) = 0. \quad (6)$$

当 $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$ 时, 两端积分, 有

$$\begin{aligned} \ln x - \ln y &= \ln c_1, \\ x &= c_1 y, \end{aligned} \quad (7)$$

这里 c_1 是一个正常数.

当 $\frac{y}{x^2} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$ 时,

$$-\frac{2dx}{x^3} + \frac{2dy}{y^3} = 0, \quad (8)$$

两端积分, 有

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = c_2, \quad (9)$$

c_2 是一个常数.

因此, 曲面有两族渐近曲线, 用定义域 xy 平面上坐标表示则其一族是 $x = c_1 y$, 这里 $x > 0, y > 0$, c_1 是一个正常数. 另一族是

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = c_2,$$

这里 $\omega > 0$, $y > 0$, c_2 是一个常数. 注意 c_2 可正可负, 也可为零. 解毕.

例 41 (i) 在曲面 S 的渐近曲线(曲率不为零)上, 挠率 τ 的绝对值 $|\tau| = \sqrt{-K}$.

(ii) θ 为曲面 S 上一个双曲点的两个渐近方向的夹角 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 求证:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{-K}}{|H|}.$$

这里 K 是曲面 S 的 Gauss 曲率, H 是平均曲率.

证明 (i) 我们知道曲面的第一、第二和第三基本形式满足关系式

$$\text{II} - 2H \text{I} + K \text{I} = 0. \quad (1)$$

沿着渐近曲线, $\text{I} = 0$. 设渐近曲线的主法向量 N 与同一点上曲面单位法向量 n 夹角为 φ , 我们知道

$$kN = \tau + k_n n, \quad (2)$$

这里 τ 是此渐近曲线在曲面上同一点的测地曲率向量, k_n 是此曲线在这一点上的法曲率. 上式两端与 n 作内积, 利用 $n \cdot \tau = 0$, 有

$$kN \cdot n = k_n. \quad (3)$$

显然, $N \cdot n = \cos \varphi$, 沿渐近曲线 $k_n = 0$, 由题目条件, 曲率 $k > 0$, 从 (3), 必有

$$\varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

而 $T \cdot n = 0$, 那么, 沿渐近曲线

$$n = \pm B. \quad (5)$$

再利用 (1), 有

$$K = -\frac{1}{1} = -\left(\frac{dn}{ds}\right)^2 = -\left(\frac{dB}{ds}\right)^2 = -\tau^2. \quad (6)$$

上式开方后, 有

$$|\tau| = \sqrt{-K}. \quad (7)$$

(ii) 在一个双曲点上, $K < 0$, 由 Gauss 曲率 K 的连续性, 则在包含这个双曲点的一个邻域 U 内, 恒有 $K < 0$.

由于 $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$, 因此在 U 内, $LN - M^2 < 0$. 渐近曲线的微分方程是

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0. \quad (8)$$

将上式因式分解, 有

$$L \left(du + \frac{M - \sqrt{M^2 - LN}}{L} dv \right) \left(du + \frac{M + \sqrt{M^2 - LN}}{L} dv \right) = 0. \quad (9)$$

所以, 我们得到

$$du + \frac{M - \sqrt{M^2 - LN}}{L} dv = 0,$$

或者

$$du + \frac{M + \sqrt{M^2 - LN}}{L} dv = 0.$$

这表明, 过 U 内每一点有两条渐近曲线. 所以, 在 U 内, 可取渐近曲线网为参数曲线网, 因而 $L = 0$, $N = 0$. 在这个双曲点上, 两条渐近曲线的交角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 满足关系式

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad (10)$$

于是 $F > 0$. 因为

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}},$$

那么,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{F}, \quad (11)$$

平均曲率

$$H = \frac{-FM}{EG-F^2}, \quad (12)$$

Gauss 曲率

$$K = \frac{-M^2}{EG-F^2}, \quad (13)$$

这里由于在这双曲点上, $K < 0$, 那么 M 不等于零, 所以我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-K}}{|H|} &= \frac{|M|}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{EG-F^2}{F|M|} \\ &= \frac{\sqrt{EG-F^2}}{F} = \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \quad (14)$$

证毕.

注 从(14), 有

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{|H|}{\sqrt{-K}},$$

而且从上述证明过程可以看出, 这时 θ 可取范围

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

因而, 我们可以知道, Gauss 曲率为负的曲面为极小曲面的充要条件是: 曲面上存在两族互相正交的渐近曲线网.

例 42 在 Gauss 映射下, 如果曲面 S 有一族渐近曲线都成大圆弧, 求证: S 是不可展的直纹面.

证明 先证此族渐近曲线都是直线. 用反证法, 沿此族中某一条渐近曲线 $r = \rho(s)$ (s 为弧长), 曲面的单位法向量 $n = \pm B$ (见本节例 41 公式(5)). 利用题目条件, $n(s)$ 在单位球面上的表示是大圆弧, 所以有单位常向量 n_0 , 使得

$$B(s) \cdot n_0 = 0. \quad (1)$$

上式对弧长 s 求导, 有

$$-\tau(s)N(s) \cdot n_0 = 0. \quad (2)$$

如果挠率 $\tau(s) = 0$, 则 $B(s)$ 为常向量, 与球面象是大圆弧矛盾, 因此 $\tau(s) \neq 0$.

从(2), 有

$$N(s) \cdot n_0 = 0, \quad (3)$$

因而, 利用(1)和(3), 有

$$\frac{d\rho(s)}{ds} = T(s) = N(s) \times B(s) = \pm n_0. \quad (4)$$

关于 s 积分(4), 有

$$\rho(s) = \pm n_0 s + a_0, \quad (5)$$

这里 a_0 为常向量. 注意这条渐近曲线仍为直线! 因此, 曲面 S 是直纹面.

如果 S 是可展曲面, 直母线的 Gauss 映射下的球面象就是一个点, 而不是大圆弧, 所以曲面 S 不可展. 证毕.

例 43 若曲面的参数曲线所构成的四边形对边长相等, 则称此参数曲线网为 Chebyshev 网.

求证: (i) 当参数曲线取 Chebyshev 网时, 曲面的第一基本形式可写成

$$I = du^{*2} + 2 \cos \omega du^* dv^* + dv^{*2},$$

其中 ω 为参数曲线的交角.

(ii) 负常 Gauss 曲率曲面上的渐近曲线构成 Chebyshev 网. 反之, 如果无平点曲面上的渐近曲线网是 Chebyshev 网, 则它的 Gauss 曲率是负常数.

证明 (i) 设曲面的第一基本形式

$$I = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2.$$

由于任何两条 u 曲线 $v = v_1, v = v_2$ (v_1, v_2 是两个不同的常数) 所截的 v 曲线段长都相等, 因而当 $u = u_0$ (u_0 是任一可允许常数) 时,

曲线 $u = u_0$ 被二曲线 $v = v_1, v = v_2$ 所截曲线段长 $\int_{v_1}^{v_2} \sqrt{G(u_0, v)} dv$

与 u_0 无关的, 仅仅依赖于 v_1, v_2 的函数. 由于 v_1, v_2 是在定义允许范围内任意选取的, 那么 $G(u_0, v)$ 应当与 u_0 无关, 仅仅是 v 的函数, 即 $G_u(u_0, v) = 0$, 这就是 $G_u(u, v) = 0$. 完全类似可以证明 $E_v(u, v) = 0$. 所以, 我们有 $E(u, v) = E(u)$, $G(u, v) = G(v)$. 从而

$$I = E(u) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(v) dv^2. \quad (1)$$

令

$$u^* = \int_{u_0}^u \sqrt{E(t)} dt, \quad v^* = \int_{v_0}^v \sqrt{G(t)} dt. \quad (2)$$

么,

$$du^* = \sqrt{E(u)} du, \quad dv^* = \sqrt{G(v)} dv. \quad (3)$$

从(3)可以看到 u 曲线(v 是常数)对应 u^* 曲线(v^* 是常数), v 曲线(u 是常数)对应 v^* 曲线(u^* 是常数).

将(3)代入(1), 有

$$I = du^{*2} + \frac{2F(u, v)}{\sqrt{E(u)G(v)}} du^* dv^* + dv^{*2}. \quad (4)$$

如记 u^* 曲线与 v^* 曲线之间的夹角为 ω , 由于它就是 u 曲线与 v 曲线之间的夹角, 我们知道

$$\cos \omega = \frac{F(u, v)}{\sqrt{E(u)G(v)}}. \quad (5)$$

所以,

$$I = du^{*2} + 2 \cos \omega du^* dv^* + dv^{*2}. \quad (6)$$

(ii) S 是负常 Gauss 曲率曲面, 由于 S 的 Gauss 曲率是负数, 从例 41(ii)的证明中可以看到, 在曲面 S 上, 可取渐近曲线网为参数曲线网. 因而曲面的第二基本形式系数 $L=0, N=0$. 曲面的 Gauss 曲率

$$K = -\frac{M^2}{EG-F^2}. \quad (7)$$

由于 $K < 0$, 则 $M \neq 0$. 从而

$$\ln(-K) = \ln M^2 - \ln(EG - F^2). \quad (8)$$

两端对 u 求导, 有

$$[\ln(-K)]_u = \frac{2M_u}{M} - \frac{1}{EG-F^2} (E_u G + EG_u - 2FF_u). \quad (9)$$

(8)式两端再对 v 求导, 有

$$[\ln(-K)]_v = -\frac{2M_v}{M} - \frac{1}{EG-F^2} (E_v G + EG_v - 2FF_v). \quad (10)$$

我们知道, 在 $F \neq 0$ 时的 Oodazzi 方程是

$$\begin{aligned} L_v - M_u &= LI_{12}^1 + M(I_{12}^2 - I_{11}^1) - NI_{11}^2, \\ M_v - N_u &= LI_{22}^1 + M(I_{22}^2 - I_{12}^1) - NI_{12}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

现在 $L=0, N=0$, 所以, 有

$$M_u = M(I_{11}^1 - I_{12}^2), \quad (12)$$

$$M_v = M(I_{22}^1 - I_{12}^2). \quad (13)$$

将(12)代入(9), (13)代入(10), 有

$$\begin{aligned} 2(I_{11}^1 - I_{12}^2) &= [\ln(-K)]_u + \frac{1}{EG-F^2} (E_u G + EG_u - 2FF_u), \\ 2(I_{22}^1 - I_{12}^2) &= [\ln(-K)]_v + \frac{1}{EG-F^2} (E_v G + EG_v - 2FF_v). \end{aligned} \quad (14)$$

然而, 由联络系数的定义可以知道

$$\begin{aligned} I_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} E_u + \frac{1}{2} g^{12} (2F_u - E_v) \\ &= \frac{1}{2(EG-F^2)} (GE_u + FE_v - 2FF_u), \end{aligned} \quad (16)$$

$$I_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{21} E_0 + \frac{1}{2} g^{22} G_u$$

$$= -\frac{1}{2(EG-F^2)}(EG_u - FE_0), \quad (17)$$

$$I_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} E_0 + \frac{1}{2} g^{12} G_u$$

$$= -\frac{1}{2(EG-F^2)}(GE_0 - FG_u), \quad (18)$$

$$I_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{21}(2F_0 - G_u) + \frac{1}{2} g^{22} G_u$$

$$= -\frac{1}{2(EG-F^2)}(FG_u + EG_0 - 2FF_0). \quad (19)$$

将(16)、(17)代入(14),将(18)、(19)代入(15),有

$$EG_u - FE_0 = -\frac{1}{2}(EG-F^2)[\ln(-K)]_u, \quad (20)$$

$$GE_0 - FG_u = -\frac{1}{2}(EG-F^2)[\ln(-K)]_0. \quad (21)$$

由于 K 是负常数,因此,从(20)和(21),有

$$\begin{cases} EG_u - FE_0 = 0 \\ FG_u - GE_0 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

从 $EG-F^2 > 0$, 立刻可以看到

$$G_u = 0, E_0 = 0. \quad (23)$$

由(21)一样的证明知道,存在参数 u^*, v^* , 使得曲面 S 的第一基本形式

$$I = du^{*2} + 2 \cos \omega du^* dv^* + dv^{*2}. \quad (24)$$

这时, u^*, v^* 曲线网仍是渐近曲线网, 从(24)知道这参数曲线网是 Chebyshev 网。

反之, 如果曲面上的渐近曲线网是 Chebyshev 网, 那么这曲面的第一、二基本形式分别是

$$\begin{aligned} I &= du^2 + 2 \cos \omega du dv + dv^2, \\ I &= 2M du dv. \end{aligned} \quad (25)$$

于是,

$$K = -\frac{M^2}{EG-F^2} \leq 0. \quad (26)$$

如果 M 在某点为零, 则这点是曲面的平点, 与题目条件不符, 因此 $K < 0$.

从(20)和(21), 立即有

$$[\ln(-K)]_u = 0, \quad [\ln(-K)]_v = 0, \quad (27)$$

故 K 是负常数。证毕。

我们已经知道曲面上曲率不等于零的渐近曲线的挠率 τ 与曲面的 Gauss 曲率 K 满足关系式

$$|\tau| = \sqrt{-K}.$$

这是著名的 Beltrami-Enneper 定理。关于渐近曲线的曲率, 则成立如下的有趣结果, 它最早也是由 Beltrami 给出的。

例 44 设 Q 是曲面 S 的一个双曲点, O 是曲面 S 上过 Q 点的渐近线, 求证: S 在 Q 的切平面 $T_Q(s)$ 与 S 的交线中必有一支曲线 O^* , 使得 O 在 Q 点的曲率 k 与 O^* 在 Q 点的曲率 k^* 满足关系式 $k^* = \frac{2}{3} k$.

证明 设曲面 S 的向量表示为 $r = r(u^1, u^2)$. 为方便起见, 设 Q 的坐标为 $(u^1, u^2) = (0, 0)$, 并设在 Q 点 r_u, r_v 是相互垂直的单位向量. 由 Taylor 展开

$$r(u^1, u^2)$$

$$= r(0, 0) + \sum_{i=1}^2 r_{u^i}(0, 0) u^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 r_{u^i u^j}(0, 0) u^i u^j$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^2 r_{u^i u^j u^k}(0, 0) u^i u^j u^k + R,$$

(1)

上式中 R 满足

$$R = \sum_{i,j,k=1}^2 R_{ij} u^i u^j u^k. \quad (2)$$

利用曲面论的基本公式(以下用 r_i 表示 r_u, r_v, r_{uv} 等

$$r_{ij} = \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij}^m r_m + \Omega_{ij} n, \quad (3)$$

这里 $\Omega_{11} = L, \Omega_{12} = M, \Omega_{22} = N, \Omega_{21} = \Omega_{12}$.

$$r_{ijk} = \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^m + \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \Omega_{ij} \omega_k^m \right) r_m + \sum_{l=1}^2 \left(\Gamma_{ij}^l \Omega_{lk} + \frac{\partial}{\partial u^k} \Omega_{ij} \right) n. \quad (4)$$

于是

$$\begin{aligned} & r(u^1, u^2) - r(0, 0) \\ &= \sum_{m=1}^2 \left[u^m + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^m(0, 0) u^i u^j \right. \\ & \quad + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^m + \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \Omega_{ij} \omega_k^m \right) (0, 0) u^i u^j u^k \\ & \quad \cdot r_m(0, 0) + \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \Omega_{ij}(0, 0) u^i u^j \right. \\ & \quad + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^2 \left(\Gamma_{ij}^k \Omega_{lk} + \frac{\partial}{\partial u^k} \Omega_{ij} \right) (0, 0) u^i u^j u^k \left. \right] n(0, 0) \\ & \quad + R. \end{aligned} \quad (5)$$

在 E^3 中作坐标变换, 把 $\{r(0, 0), r_1(0, 0), r_2(0, 0), n(0, 0)\}$ 取为新坐标系 (ω, y, z) 的标架. 若记

$$R = R_\omega r_1(0, 0) + R_y r_2(0, 0) + R_z n(0, 0). \quad (6)$$

则由(5)知道, 这交线在新坐标系下的参数方程为

$$\begin{cases} x^* = u^1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(0, 0) u^i u^j \\ \quad + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^1 + \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^1 - \Omega_{ij} \omega_k^1 \right) (0, 0) u^i u^j u^k \\ \quad + R_x, \\ y^* = u^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(0, 0) u^i u^j \\ \quad + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^2 + \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^2 - \Omega_{ij} \omega_k^2 \right) (0, 0) u^i u^j u^k \\ \quad + R_y, \\ z^* = 0. \end{cases} \quad (7)$$

自然, 其中的参数 u^1, u^2 还应满足如下的约束条件:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \Omega_{ij}(0, 0) u^i u^j \\ & + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^2 \left(\Gamma_{ij}^k \Omega_{lk} + \frac{\partial}{\partial u^k} \Omega_{ij} \right) (0, 0) u^i u^j u^k + R_z \\ & = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

若选用交线的弧长 s^* 来表示, 相应的参数方程 $u^1 = u^*(s^*), u^2 = v^*(s^*)$ 就应满足(7)、(8)式. 下面我们来求 $u^*(s^*), v^*(s^*)$ 满足的条件. 首先, 由(8), 两边对 s^* 求导, 注意到 Oodazzi 方程的对称性,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 \Omega_{ij}(0, 0) u^i \frac{du^j}{ds^*} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 \left(\Gamma_{ij}^k \Omega_{lk} + \frac{\partial}{\partial u^k} \Omega_{ij} \right) (0, 0) u^i u^j \frac{du^k}{ds^*} \\ & + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial R_i}{\partial u^i} \frac{du^i}{ds^*} \\ & = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

再对 s^* 求导, 有

$$\sum_{i,j=1}^2 \Omega_{ij}(0, 0) \frac{du^i}{ds^*} \frac{du^j}{ds^*} + \sum_{i,j=1}^2 \Omega_{ij}(0, 0) u^i \frac{d^2 u^j}{ds^{*2}}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j,k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 \Gamma_{ij}^i \Omega_{ik} + \frac{\partial}{\partial u^k} \Omega_{ij} \right) (0, 0) u^i \frac{du^j}{ds^*} \frac{du^k}{ds^*} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 \Gamma_{ij}^i \Omega_{ik} + \frac{\partial}{\partial u^k} \Omega_{ij} \right) (0, 0) u^i u^j \frac{d^2 u^k}{ds^{*2}} \\
& + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 R_s}{\partial u^i \partial u^j} \frac{du^i}{ds^*} \frac{du^j}{ds^*} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial R_s}{\partial u^i} \frac{d^2 u^i}{ds^{*2}} \\
& = 0.
\end{aligned} \quad (10)$$

将(10)式限制在Q点取值,注意到(2)与(6),就得到

$$\sum_{i,j=1}^2 \Omega_{ij}(0, 0) \frac{du^i}{ds^*} \frac{du^j}{ds^*} = 0. \quad (11)$$

这表明交线曲线在Q点的切方向也是曲面S的渐近方向.将(10)式左边继续对 s^* 求导,然后再限制到Q点取值,我们便得到

$$\begin{aligned}
& 3 \sum_{i,j=1}^2 \Omega_{ij}(0, 0) \frac{du^i}{ds^*} \frac{d^2 u^j}{ds^{*2}} \\
& + \sum_{i,j,k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 \Gamma_{ij}^i \Omega_{ik} + \frac{\partial}{\partial u^k} \Omega_{ij} \right) (0, 0) \\
& \cdot \frac{du^i}{ds^*} \frac{du^j}{ds^*} \frac{du^k}{ds^*} = 0.
\end{aligned} \quad (12)$$

另外,对交线上任意点应成立

$$\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u^*(s^*), v^*(s^*)) \frac{du^i}{ds^*} \frac{du^j}{ds^*} = 1. \quad (13)$$

两边对 s^* 求导,并限制到Q点取值,又得到

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(0, 0) \frac{du^i}{ds^*} \frac{d^2 u^j}{ds^{*2}} \\
& + \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij}(0, 0) \frac{du^i}{ds^*} \frac{du^j}{ds^*} \frac{du^k}{ds^*} \\
& = 0.
\end{aligned} \quad (14)$$

至此求得的(11)、(12)、(14)和限制在Q点的(13)就是交线曲线参数方程 $u^1=u^*(s^*)$, $u^2=v^*(s^*)$ 在Q点满足的微分条件.除

(13)外,上面全部 $\frac{du^i}{ds^*}$, $\frac{d^2 u^j}{ds^{*2}}$ ($1 \leq i, j \leq 2$)在Q点取值.

为简化计算,不妨进一步假定 u^1, u^2 是以Q为原点的法坐标系,而且初始标架 $\tau_1(0, 0), \tau_2(0, 0)$ 恰为主方向.这时

$$(\Omega_{ij}(0, 0)) = \begin{pmatrix} L(0, 0) & 0 \\ 0 & N(0, 0) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\Gamma_{jk}^i(0, 0) = 0.$$

于是 $u^*(s^*), v^*(s^*)$ 在Q点满足的上述四个微分条件就化为

$$\begin{cases} L(0, 0) \left(\frac{du^*}{ds^*} \right)^2 + N(0, 0) \left(\frac{dv^*}{ds^*} \right)^2 = 0, \\ 3L(0, 0) \frac{du^*}{ds^*} \frac{d^2 u^*}{ds^{*2}} + 3N(0, 0) \frac{dv^*}{ds^*} \frac{d^2 v^*}{ds^{*2}} = \sigma^*, \\ \left(\frac{du^*}{ds^*} \right)^2 + \left(\frac{dv^*}{ds^*} \right)^2 = 1, \\ \frac{du^*}{ds^*} \frac{d^2 u^*}{ds^{*2}} + \frac{dv^*}{ds^*} \frac{d^2 v^*}{ds^{*2}} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$\sigma^* = - \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^k} \Omega_{ij}(0, 0) \frac{du^i}{ds^*} \frac{du^j}{ds^*}. \quad (17)$$

从(16)的第一、三式可解得

$$\begin{cases} \left(\frac{du^*}{ds^*} \right)^2 = - \frac{N(0, 0)}{L(0, 0) - N(0, 0)}, \\ \left(\frac{dv^*}{ds^*} \right)^2 = - \frac{L(0, 0)}{L(0, 0) - N(0, 0)}. \end{cases} \quad (18)$$

再由(16)的第二、四式可解得

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^*}{ds^{*2}} = \frac{\sigma^*}{3 \frac{du^*}{ds^*} (L(0, 0) - N(0, 0))}, \\ \frac{d^2 v^*}{ds^{*2}} = - \frac{\sigma^*}{3 \frac{dv^*}{ds^*} (L(0, 0) - N(0, 0))}. \end{cases} \quad (19)$$

这时由(7)式直接计算,或由(11)式可推出交线曲线在Q点

的曲率满足

$$\begin{aligned}
 (k^*)^2 &= (k_g^*)^2 \quad (k_g^* \text{ 为测地曲率, 在 } Q \text{ 点取值}) \\
 &= \left| \sum_{i=1}^2 \left(\frac{d^2 u^i}{ds^{*2}} + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds^*} \frac{du^k}{ds^*} \right) r_i \right|^2 (Q) \\
 &= \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(0,0) \frac{d^2 u^i}{ds^{*2}} \frac{d^2 u^j}{ds^{*2}} \\
 &= \left(\frac{d^2 u^*}{ds^{*2}} \right)^2 + \left(\frac{d^2 v^*}{ds^*} \right)^2 \\
 &= -\frac{\sigma^{*2}}{9L(0,0)N(0,0)}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

另一方面, 对 S 上的渐近曲线 σ , 应用它自己的弧长 s 作参数, 那么, 它的参数方程 $u^1 = u(s), u^2 = v(s)$ 由定义应满足

$$\sum_{i,j=1}^2 \Omega_{ij}(u(s), v(s)) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0. \quad (21)$$

上式对 σ 上的任何点都成立, 上式对 s 求导, 有

$$2 \sum_{i,j=1}^2 \Omega_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{dv^j}{ds} + \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0.$$

自然我们还能写出与 (13)、(14) 类似的公式

$$\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u(s), v(s)) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 1. \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 &2 \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u(s), v(s)) \frac{du^i}{ds} \frac{d^2 u^j}{ds^2} \\
 &+ \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij}(u(s), v(s)) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \\
 &= 0. \quad (23)
 \end{aligned}$$

把 (21) — (24) 限制到 Q 点, 注意到所取坐标的前述特点, 我们得到 $u(s), v(s)$ 在 Q 点应满足的条件

$$(24)$$

$$\begin{cases}
 L(0,0) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + N(0,0) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0, \\
 2L(0,0) \frac{du}{ds} \frac{d^2 u}{ds^2} + 2N(0,0) \frac{dv}{ds} \frac{d^2 v}{ds^2} = \sigma, \\
 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1, \\
 \frac{du}{ds} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{dv}{ds} \frac{d^2 v}{ds^2} = 0,
 \end{cases} \quad (25)$$

其中

$$\sigma = - \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^k} \Omega_{ij}(0,0) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds}. \quad (26)$$

与前面类似, 由 (25) 可以解得 (这里 $\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$ 都在 Q 点取值)

$$\begin{cases}
 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = - \frac{N(0,0)}{L(0,0) - N(0,0)}, \\
 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = - \frac{L(0,0)}{L(0,0) - N(0,0)}.
 \end{cases} \quad (27)$$

以及 (下面 $\frac{d^2 u}{ds^2}, \frac{d^2 v}{ds^2}$ 也在 Q 点取值)

$$\begin{cases}
 \frac{d^2 u}{ds^2} = \frac{\sigma}{2 \frac{du}{ds} (L(0,0) - N(0,0))}, \\
 \frac{d^2 v}{ds^2} = - \frac{\sigma}{2 \frac{dv}{ds} (L(0,0) - N(0,0))}.
 \end{cases} \quad (28)$$

于是, σ 在 Q 点的曲率就满足

$$\begin{aligned}
 k^2 &= k_g^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(0,0) \frac{d^2 u^i}{ds^2} \frac{d^2 u^j}{ds^2} \\
 &= \left(\frac{d^2 u}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 v}{ds^2} \right)^2 = - \frac{\sigma^2}{4L(0,0)N(0,0)}.
 \end{aligned} \quad (29)$$

由于 Q 是双曲点, 所以 $L(0,0)N(0,0) < 0$, 上面一切公式皆有意义, 而且平面 $T_Q(s)$ 与曲面 s 的交线曲线有二支. 从 (18) 和

(27) 可以看出在 Q 点

$$\begin{cases} \frac{du^*}{ds^*} = \pm \frac{du}{ds} \\ \frac{dv^*}{ds^*} = \pm \frac{dv}{ds} \end{cases} \quad (30) \quad (\text{右端同时取正号或负号})$$

或者

$$\begin{cases} \frac{du^*}{ds^*} = \pm \frac{du}{ds} \\ \frac{dv^*}{ds^*} = \mp \frac{dv}{ds} \end{cases} \quad (31) \quad (\text{右端始终取一正一负})$$

我们取在 Q 点的切向量是 (30) 的那一条曲线为 O^* , 于是, 曲线 O 与 O^* 在 Q 点是相切的, 因而由 (17) 决定的 $|\sigma^*|$ 必等于由 (26) 决定的 $|\sigma|$. 从 (20) 和 (29), 我们有

$$k^* = \frac{2}{3} k. \quad (32)$$

证毕.

§5 主曲率与曲率线

本节举几个有关主曲率、脐点和曲率线的例题.

例 45 在抛物线依其准线旋转所得的曲面上, 求证: 主曲率之比是常数.

证明 设抛物线方程是 $z^2 = 2px$ ($x > 0$, p 是正常数), 则绕准线旋转所得的曲面方程是

$$z^2 = 2p \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{p}{2} \right). \quad (1)$$

这旋转曲面写成向量形式为

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \pm \sqrt{2pu - p^2}), \quad (2)$$

这里 $u > \frac{p}{2}$. 由直接计算可得

$$\mathbf{r}_u = \left(\cos v, \sin v, \pm \frac{p}{\sqrt{2pu - p^2}} \right),$$

$$\mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = \left(0, 0, \mp \frac{p^2}{(2pu - p^2)^{3/2}} \right),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\mp \frac{pu \cos v}{\sqrt{2pu - p^2}}, \mp \frac{pu \sin v}{\sqrt{2pu - p^2}}, u \right)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{2pu}} (\mp p \cos v, \mp p \sin v, \sqrt{2pu - p^2}). \quad (3)$$

这旋转曲面的第一、二基本形式系数分别是

$$E = \mathbf{r}_u^2 = \frac{2pu}{2pu - p^2}, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0,$$

$$G = \mathbf{r}_v^2 = u^2;$$

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uu} = \mp \frac{p^2}{\sqrt{2pu}(2pu - p^2)},$$

$$M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uv} = 0.$$

$$N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{vv} = \pm \sqrt{\frac{pu}{2}}. \quad (4)$$

由于 $F = M = 0$, 参数曲线网是曲率线网. 曲面的两个主曲率

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}, \quad (5)$$

满足条件

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{LG}{EN} = -\frac{1}{2}. \quad (6)$$

证毕.

例 46 求曲面 $\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{a}{2}(u-v), \frac{b}{2}(u+v), \frac{1}{2}uv \right)$ 的

曲率线, 这里 a, b 是正常数.

解 依次微分曲面的向量形式,

$$\mathbf{r}_u = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{v}{2} \right), \quad \mathbf{r}_v = \left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{u}{2} \right).$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{uv} = \left(0, 0, \frac{1}{2} \right),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (0, 0, 0).$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\frac{b}{4}(u-v), -\frac{a}{4}(u+v), \frac{1}{2}ab \right)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{b}{4}(u-v), -\frac{a}{4}(u+v), \frac{1}{2}ab \right),$$

这里

$$\Delta = \left[\frac{b^2}{16}(u-v)^2 + \frac{a^2}{16}(u+v)^2 + \frac{1}{4}a^2b^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

曲面的第一、二基本形式系数

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + v^2),$$

$$F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \frac{1}{4}(b^2 + uv - a^2),$$

$$G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + u^2);$$

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uu} = 0, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uv} = \frac{ab}{4\Delta}$$

$$N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{vv} = 0.$$

我们将(4)代入曲率线微分方程, 可得

$$E du^2 - G dv^2 = 0.$$

将上式因式分解, 有

$$(\sqrt{E} du + \sqrt{G} dv)(\sqrt{E} du - \sqrt{G} dv) = 0.$$

第一种情况是

$$B \cdot n = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

$$\sqrt{E} du + \sqrt{G} dv = 0. \quad (7)$$

这时, 利用(3), 有

$$\frac{du}{\sqrt{a^2 + b^2 + u^2}} + \frac{dv}{\sqrt{a^2 + b^2 + v^2}} = 0. \quad (8)$$

两端积分, 有

$$\ln(u + \sqrt{a^2 + b^2 + u^2}) + \ln(v + \sqrt{a^2 + b^2 + v^2}) = \ln c_1,$$

那么,

$$(u + \sqrt{a^2 + b^2 + u^2})(v + \sqrt{a^2 + b^2 + v^2}) = c_1 \quad (9)$$

是一族曲率线, 这里 c_1 是正常数.

第二种情况是

$$\sqrt{E} du - \sqrt{G} dv = 0. \quad (10)$$

再利用(3), 类似有另一族曲率线

$$\frac{u + \sqrt{a^2 + b^2 + u^2}}{v + \sqrt{a^2 + b^2 + v^2}} = c_2, \quad (11)$$

这里 c_2 也是正常数. 解毕.

许多求曲面的曲率线的常规习题都是上例这种情况.

例 47 设一条曲率线 (非渐近曲线) 的密切平面与曲面的切平面交于定角, 求证: 这条曲率线必为平面曲线. 反之, 如果曲面的一条曲率线是平面曲线, 求证: 沿这条曲率线曲面的切平面与这曲率线所在平面必相交于定角.

证明 设曲率线为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 这里 s 是弧长. 又设 N, n 之间夹角为 θ , 不妨设 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 如果 N, n 之间夹角大于 $\frac{\pi}{2}$, 代替 n , 取 $-n$ 作为曲面的单位法向量, 这时 $N, -n$ 之间夹角就小于 $\frac{\pi}{2}$. n 与 B 之间夹角为 $\frac{\pi}{2} - \theta$, 或 $\frac{\pi}{2} + \theta$, 依题意 $\frac{\pi}{2} - \theta$, 或 $\frac{\pi}{2} + \theta$ 为定角, 则 θ 为定角. 由于

或等于 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$. 两边对弧长 s 求导, 有

$$\frac{dB}{ds} \cdot n + B \cdot \frac{dn}{ds} = 0. \quad (1)$$

由于 $r = r(s)$ 为曲率线, 由 Rodrigues 公式, $\frac{dn}{ds}$ 平行于 $\frac{dr}{ds}$, 于是有

$$B \cdot \frac{dn}{ds} = 0.$$

从(1), 有

$$\frac{dB}{ds} \cdot n = 0. \quad (2)$$

利用曲线论的 Frenet 公式, 有

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N,$$

那么,

$$-\tau \cos \theta = 0. \quad (3)$$

由于这条曲率线不是渐近曲线, n 不平行于 B , 于是 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta \neq 0$, 因而 $\tau = 0$, 这条曲率线必为平面曲线.

反之, 已知曲面的一条曲率线 $r = r(s)$ (s 是弧长) 是平面曲线, 那么, 沿这条曲率线, B 是常向量. 由于沿一条曲率线 $B \cdot \frac{dn}{ds} = 0$, 所以 $\frac{d}{ds}(B \cdot n) = 0$, 这表明沿这条曲率线

$$B \cdot n = \cos \theta,$$

而 θ 为常数. 即沿这曲率线, 曲面的切平面与这曲率线所在平面相交于定角. 证毕.

例 48 求正则曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的曲率线的微分方程.

解 我们知道, 面上的曲线 $C, \rho(s) = (x(s), y(s), z(s))$ (s

为弧长) 为曲率线的充要条件是

$$\left(\frac{d\rho}{ds}, n, \frac{dn}{ds}\right) = 0. \quad (1)$$

而 $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$, 由于研究正则曲面. $|\nabla F| \neq 0$, 可取

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|},$$

换句话说

$$|\nabla F| n = \nabla F. \quad (2)$$

上式两端微分, 有

$$d|\nabla F| n + |\nabla F| dn = d(\nabla F). \quad (3)$$

那么,

$$|\nabla F| dn = d(\nabla F) - d|\nabla F| n. \quad (4)$$

于是

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\rho}{ds}, n, \frac{dn}{ds}\right) &= -\frac{1}{|\nabla F|^2} \left(\frac{d\rho}{ds}, \nabla F, \frac{d(\nabla F)}{ds} - \frac{d|\nabla F|}{ds} n\right) \\ &= -\frac{1}{|\nabla F|^2} \left(\frac{d\rho}{ds}, \nabla F, \frac{d(\nabla F)}{ds}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

因而

$$\left(\frac{d\rho}{ds}, \nabla F, \frac{d(\nabla F)}{ds}\right) = 0. \quad (6)$$

写成微分方程形式为

$$(d\rho, \nabla F, d(\nabla F)) = 0, \quad (7)$$

即

$$\begin{vmatrix} dx, dy, dz \\ F_x, F_y, F_z \\ dF_x, dF_y, dF_z \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

这就是正则曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的曲率线的微分方程. 解毕.

例 49 已知椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 这里常数 $a > b > c > 0$.

(i) 求脐点.

(ii) 过原点作与脐点处切平面平行的平面, 求证: 这平面交这椭球面于圆周.

解 (i) 把椭球面写成向量形式

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u) \quad (1)$$

这里 $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 \leq v < 2\pi$. 直接计算, 有

$$\mathbf{r}_u = (-a \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, c \cos u),$$

$$\mathbf{r}_v = (-a \cos u \sin v, b \cos u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (-a \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, -c \sin u),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = (a \sin u \sin v, -b \sin u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-a \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-bc \cos^2 u \cos v, -ac \cos^2 u \sin v,$$

$$-ab \sin u \cos u),$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

$$= \frac{1}{\Delta} (-bc \cos u \cos v, -ac \cos u \sin v, -ab \sin u), \quad (2)$$

这里

$$\Delta = [b^2 c^2 \cos^2 u \cos^2 v + a^2 c^2 \cos^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \sin^2 u]^{\frac{1}{2}}.$$

因此, 椭球面的第一、二基本形式系数分别是

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = a^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 u,$$

$$F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = (a^2 - b^2) \sin u \cos u \sin v \cos v,$$

$$G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = a^2 \cos^2 u \sin^2 v + b^2 \cos^2 u \cos^2 v;$$

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uu} = \frac{abc}{\Delta},$$

$$N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{vv} = \frac{abc}{\Delta} \quad (3)$$

显然

$$EG - F^2 = \frac{a^2 b^2}{\Delta^2} \quad (4)$$

我们知道脐点的充要条件是

$$\frac{L}{E} = \frac{N}{G} \quad (5)$$

那么

$$\text{由于 } L > 0, \text{ 从 } M = 0, \text{ 必有 } \cos v = 0. \quad (6)$$

$$\text{又由于 } -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } \cos u > 0. \text{ (6) 有 } v = 0. \quad (7)$$

从而有三种情况:

$$\text{① } \sin u = 0, \cos^2 u = 1, \text{ 以知道 } LG = EN, \text{ 利用 (3), 应当有}$$

$$a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v = a^2 \sin^2 v + c^2 \cos^2 v = c^2. \quad (8)$$

由于 $a > b > c > 0$, 那么

$$a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v > c^2. \quad (9)$$

(9) 与 (8) 矛盾, 所以 $\sin u \neq 0$.

② $\sin v = 0, \cos^2 v = 1$, 从 $LG = EN$, 有

$$b^2 = a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u = a^2 + (c^2 - a^2) \cos^2 u, \quad (10)$$

即

$$\cos u = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad (11)$$

显然,

$$\sin u = \pm \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \quad (12)$$

因此, 椭球面有四个脐点

$$\begin{aligned} & \left(a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right), \left(a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, -c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right), \\ & \left(-a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right), \left(-a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, -c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right). \end{aligned}$$

③ $\cos v = 0$, $\sin^2 v = 1$, 再一次利用 $LG = EN$,

有

$$a^2 = b^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u. \quad (13)$$

但 $a > b > c > 0$, 则

$$a^2 > b^2 \geq b^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u. \quad (14)$$

(13) 与 (14) 是一个矛盾.

细心的读者会发现, 在表示式(1)内, 我们在椭球面上漏了二点 $(0, 0, c)$ 和 $(0, 0, -c)$. 那么这两点是否有可能是椭球面的脐点呢? 椭球面的 Gauss 曲率

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{\Delta^4}. \quad (15)$$

由于 K 是椭球面上连续可微函数, 由计算

$$\lim_{u \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \frac{a^2 b^2 c^2}{\Delta^4} = \frac{c^2}{a^2 b^2}. \quad (16)$$

所以在 $(0, 0, c)$ 点和 $(0, 0, -c)$ 点, 椭球曲的 Gauss 曲率都是

$$\frac{c^2}{a^2 b^2}.$$

椭球面的平均曲率

$$H = \frac{LG + EN}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{abc}{2\Delta^3} (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v \\ &+ a^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 u). \end{aligned} \quad (17)$$

于是

$$\lim_{v \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} H = \frac{c}{2a^2 b^2} (a^2 + b^2). \quad (18)$$

$(0, 0, c)$ 与 $(0, 0, -c)$ 是脐点的充要条件是在这二点上, $K = H^2$. 但是从(16)和(18), 再利用 $a > b$, 有

$$\frac{H^2}{K} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2 b^2} > 1. \quad (19)$$

这表明 $(0, 0, c)$ 与 $(0, 0, -c)$ 都不是脐点.

(ii) 例如取脐点 $\left(-a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right)$, 利用公式(2), 在这脐点的单位法向量

$$n = \left(\frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, -\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right). \quad (20)$$

于是 n 平行于向量 $(c\sqrt{a^2 - b^2}, 0, -a\sqrt{b^2 - c^2})$, 过原点的以 n 为法向量的平面方程是

$$c\sqrt{a^2 - b^2} x - a\sqrt{b^2 - c^2} z = 0, \quad (21)$$

这平面与椭球面的截线方程是

$$\begin{cases} c\sqrt{a^2 - b^2} x - a\sqrt{b^2 - c^2} z = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases} \quad (22)$$

从(22)第一式, 可以看到

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} x = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c} z, \quad (23)$$

两边平方, 有

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{c^2} z^2 = 0. \quad (24)$$

(24) 两边除以 b^2 , 有

$$\frac{1}{b^2} (x^2 + z^2) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = 0. \quad (25)$$

利用(22)的第二式, 有

$$\frac{1}{b^2} (x^2 + z^2) - \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) = 0. \quad (26)$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2. \quad (27)$$

因此, 这截线是平面与球面的交线, 为一圆周. 类似可以讨论从其他脐点出发的情况. 解毕.

§ 6 测地线和测地曲率

测地线是曲面上最重要的一类曲线. 在内蕴几何中, 它是个重要的研究对象, 本节举的例题也较多.

例 50 已知曲面 S 的第一基本形式是 $I = [\varphi(u) + \psi(v)] (du^2 + dv^2)$, 这里 $\varphi(u)$ 是 u 的函数 ($-a < u < a$, a 是正常数), $\psi(v)$ 是 v 的函数 ($-b < v < b$, b 是正常数). 求证: 曲面 S 的测地线满足等式

$$\int_0^u \frac{d\psi^*}{\sqrt{\varphi(u^*)} - c_1} = \pm \int_0^v \frac{d\psi^*}{\sqrt{\psi(v^*)} + c_2},$$

这里 c_1, c_2 是常数.

证明 本题中曲面 S 的第一基本形式系数

$$E = G = \varphi(u) + \psi(v), \quad F = 0. \quad (1)$$

那么曲面 S 的联络系数是

$$\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2[\varphi(u) + \psi(v)]} \frac{d\varphi(u)}{du},$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2[\varphi(u) + \psi(v)]} \frac{d\psi(v)}{dv}. \quad (2)$$

设 $u = u(s)$, $v = v(s)$ 是测地线的参数表示, 代入测地线的微分方程 (注意 s 是弧长)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(s)}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du(s)}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du(s)}{ds} \frac{dv(s)}{ds} \\ + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv(s)}{ds} \right)^2 = 0, \\ \frac{d^2 v(s)}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du(s)}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du(s)}{ds} \frac{dv(s)}{ds} \\ + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv(s)}{ds} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

那么有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(s)}{ds^2} + \frac{1}{\varphi(u) + \psi(v)} \left[\frac{1}{2} \frac{d\varphi(u)}{du} \left(\frac{du(s)}{ds} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{d\psi(v)}{dv} \frac{du(s)}{ds} \frac{dv(s)}{ds} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi(u)}{du} \left(\frac{dv(s)}{ds} \right)^2 \right] \\ = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v(s)}{ds^2} + \frac{1}{\varphi(u) + \psi(v)} \left[\frac{1}{2} \frac{d\psi(v)}{dv} \left(\frac{dv(s)}{ds} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{d\varphi(u)}{du} \frac{du(s)}{ds} \frac{dv(s)}{ds} - \frac{1}{2} \frac{d\psi(v)}{dv} \left(\frac{du(s)}{ds} \right)^2 \right] \\ = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

将(4)、(5)改写为

$$\begin{aligned} 2[\varphi(u) + \psi(v)] \frac{du(s)}{ds} \frac{d^2 v(s)}{ds^2} \\ = \frac{du(s)}{ds} \left\{ \frac{d\psi(v)}{dv} \left[\left(\frac{du(s)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dv(s)}{ds} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - 2 \frac{d\varphi(u)}{du} \frac{du(s)}{ds} \frac{dv(s)}{ds} \right\}, \\ 2[\varphi(u) + \psi(v)] \frac{dv(s)}{ds} \frac{d^2 u(s)}{ds^2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{T}(s) = \cos \theta \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}} + \sin \theta \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}, \quad (1)$$

这里 $E=G=\varphi(u)+\psi(v)$.

另一方面, 设此测地线的弧长为 s , 则由定义又有

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d\mathbf{r}(u(s), v(s))}{ds} = \mathbf{r}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{ds}. \quad (2)$$

比较(1)、(2)的右端, 并利用 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 的线性无关性, 可得

$$\frac{du}{ds} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{E}}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}}. \quad (3)$$

从例 50 中(11), 有

$$\begin{aligned} \varphi(u) \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{G}} \right)^2 - \psi(v) \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{E}} \right)^2 \\ = c_1 \left[\left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{E}} \right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{G}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

由于 $E=G$, 从上式就化为要证的

$$\varphi(u) \sin^2 \theta - \psi(v) \cos^2 \theta = c_1. \quad (5)$$

证毕.

例 52 在可展曲面上, 求证: 测地线(非直线)的从切平面所包的包络面恰为已给的曲面.

证明 设此测地线为 $C: \mathbf{r}=\rho(u)$, u 为弧长. 又设沿 $\rho(u)$ 的母线方向为 $\mathbf{l}(u)$, 那么此可展曲面可记为 S :

$$\mathbf{r}(u, v) = \rho(u) + v\mathbf{l}(u). \quad (1)$$

曲线 $\mathbf{r}=\rho(u)$ 的从切平面族 T_u 方程是

$$N(u) (\mathbf{r}^* - \rho(u)) = 0, \quad (2)$$

这里 $\mathbf{r}^* = (x, y, z)$. 这从切平面族 T_u 的包络面 Σ 是

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, \lambda) &= \rho(u) + \lambda N(u) \times \frac{dN(u)}{du} \\ &= \rho(u) + \lambda N(u) \times [-k(u)\mathbf{T}(u) + \tau(u)\mathbf{B}(u)] \\ &= \rho(u) + \lambda[k(u)\mathbf{B}(u) + \tau(u)\mathbf{T}(u)], \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $k(u), \tau(u)$ 分别是这测地线 C 的曲率和挠率. 因而, 我们只要证明曲面 S 与曲面 Σ 在曲线 $\mathbf{r}=\rho(u)$ 的同一点上母线方向互相平行就可以了, 换句话说讲, 我们要证明

$$\mathbf{l}(u) \parallel k(u)\mathbf{B}(u) + \tau(u)\mathbf{T}(u). \quad (4)$$

在曲面 S 上, 沿曲线 C ,

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|_{v=0} = \mathbf{T}(u) \times \mathbf{l}(u). \quad (5)$$

由于 C 是测地线, 所以 $\mathbf{T}(u) \times \mathbf{l}(u)$ 平行于 $N(u)$, 那么 $\mathbf{l}(u)$ 垂直于 $N(u)$, 从而可设

$$\mathbf{l}(u) = a(u)\mathbf{T}(u) + b(u)\mathbf{B}(u). \quad (6)$$

由于 S 是可展曲面, 那么

$$\left(\frac{d\rho(u)}{du}, \mathbf{l}(u), \frac{d\mathbf{l}(u)}{du} \right) = 0, \quad (7)$$

即

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\mathbf{T}(u), a(u)\mathbf{T}(u) + b(u)\mathbf{B}(u), \frac{da(u)}{du}\mathbf{T}(u) \right. \\ &\quad \left. + \frac{db(u)}{du}\mathbf{B}(u) + [a(u)k(u) - b(u)\tau(u)]N(u) \right) \\ &= (\mathbf{T}(u), b(u)\mathbf{B}(u), [a(u)k(u) - b(u)\tau(u)]N(u)). \end{aligned} \quad (8)$$

这表明

$$b(u) [a(u)k(u) - b(u)\tau(u)] = 0. \quad (9)$$

由于 S 为正则曲面, 从(5)和(6)可以看到 $b(u) \neq 0$, 否则在曲线 C 上有点是曲面 S 的奇点.

从(9), 有

$$\frac{a(u)}{\tau(u)} = \frac{b(u)}{k(u)} = \mu(u), \quad (10)$$

换句话说讲, 我们有

$$\mathbf{l}(u) = \mu(u) [\tau(u)\mathbf{T}(u) + k(u)\mathbf{B}(u)]. \quad (11)$$

这就证明了(4). 证毕.

例 53 设过曲面 S 上任何点均存在三条非直线的测地线, 而且这些测地线均为平面曲线, 求证: 曲面 S 为全脐点曲面.

证明 任取 $P \in S$, 设过点 P 的三条非直线的测地线为 O_1, O_2, O_3 , 因为测地线由初始点和初始切向量唯一决定, 所以 O_1, O_2, O_3 在 P 点不可能相切, 即它们在 P 点的单位切向量 T_1, T_2, T_3 是三个不同的切向量.

由于这三条测地线不是直线, 所以沿曲线 O_i , 曲面 S 的单位

法向量

$$n = \pm N_i, \quad (i=1, 2, 3)$$

这里的 N_i 是曲线 O_i 的主法向量. 将上式对曲线 O_i 的弧长 s_i 求导, 利用曲线论的 Frenet 公式, 注意到这些测地线均为平面曲线, 在点 P ,

$$\frac{dn}{ds_i} = \pm (-k_i T_i + \tau_i B_i) = \mp k_i T_i.$$

这里 k_i 和 τ_i 分别是曲线 O_i 的曲率和挠率.

根据 Rodrigues 公式, O_1, O_2, O_3 在 P 点的单位切向量均为主方向, 这样, 曲面 S 在点 P 有三个不同的主方向, 这只有在点是脐点时才会产生, 由于 P 是曲面 S 上任意一点, 那么 S 是脐点曲面. 证毕.

例 54 已知环面 $r(u, v) = ((a+r \cos u) \cos v, (a+r \cos u) \sin v, r \sin u)$, 这里常数 $a > r > 0, (u, v) \in R^2$.

(i) 如果环面上有一条测地线切于 $u = \frac{1}{2}\pi$ 曲线, 求证:

条测地线完全落在环面由 $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ 所决定的区域内.

(ii) 设一条测地线与纬圆 $u=0$ 相交, 其交角为 $\theta_0 (0 < \theta_0$

$\frac{\pi}{2})$. 若 $\cos \theta_0 < \frac{a-r}{a+r}$, 求证: 它也与纬圆 $u=\pi$ 相交.

证明 (i) $r_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$,
 $r_v = (-(a+r \cos u) \sin v, (a+r \cos u) \cos v, 0)$.

于是环面的第一基本形式系数

$$E=r_u^2=r^2, \quad F=r_u \cdot r_v=0, \quad G=r_v^2=(a+r \cos u)^2. \quad (1)$$

设测地线与 v 曲线交角为 $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, 则与 u 曲线交角为 $\frac{\pi}{2} - \theta$. 由测地线的 Liouville 公式,

$$\begin{cases} \sqrt{E} \frac{du}{ds} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \\ \sqrt{G} \frac{dv}{ds} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \\ \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \quad - \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \end{cases} \quad (2)$$

这里 s 是测地线的弧长.

再利用(1), (2)简化为

$$\begin{cases} r \frac{du}{ds} = \sin \theta, \\ (a+r \cos u) \frac{dv}{ds} = \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{ds} = -\frac{\sin u}{a+r \cos u} \cos \theta. \end{cases} \quad (3)$$

从(3)的第一个方程, 有

$$ds = \frac{r du}{\sin \theta}. \quad (4)$$

将(4)代入(3)内第三个方程, 有

$$-\frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta} = \frac{r \sin u du}{a+r \cos u}. \quad (5)$$

上式两端积分, 有

$$\ln \cos \theta = -\ln(a + r \cos u) + \ln c, \quad (6)$$

这里 c 是一个正常数。从(6), 有

$$(a + r \cos u) \cos \theta = c. \quad (7)$$

如果 θ_j ($j=1, 2, \dots$) 满足(7), 和 $\theta_j \rightarrow \theta$, 在(7)中取极限 $\theta_j \rightarrow \theta$, (7)仍然成立, 所以(7)中 θ 范围可扩大为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. (7)是环面上一条测地线的 Clairaut 关系式。显然, 满足(3)的第一、第二两个方程和关系式(7)的函数 u, v, θ 在环面的同一条测地线上。现在在(7)中, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, c 为非负常数。

由题目条件, 一条测地线切于曲线 $u = \frac{1}{2}\pi$, 我们把 $\theta = 0$, $u = \frac{1}{2}\pi$ 代入(7), 可以得到

$$c = a. \quad (8)$$

那么, 从(7)和(8), 我们有

$$(a + r \cos u) \cos \theta = a. \quad (9)$$

又由于 $a > r > 0$, 从(9), 有 $\cos \theta > 0$, 而 $\cos \theta \leq 1$, 那么, 再

$$a + r \cos u \geq a. \quad (10)$$

不等式(10)导致

$$\cos u \geq 0. \quad (11)$$

所以, 这条测地线完全落在环面由 $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ 决定的区内。

(ii) 从已知条件, 用 $u=0, \theta=\theta_0$ 代入环面上一条测地线 Clairaut 关系式, 有

$$(a + r) \cos \theta_0 = c. \quad (12)$$

因此, 环面上这条测地线的 Clairaut 关系式是

$$(a + r \cos u) \cos \theta = (a + r) \cos \theta_0. \quad (13)$$

由题目条件, $0 < \cos \theta_0 < \frac{a-r}{a+r}$, 若取

$$\theta_1 = \arccos \left[\frac{(a+r)}{(a-r)} \cos \theta_0 \right], \quad (14)$$

则

$$\begin{aligned} (a+r \cos \pi) \cos \theta_1 &= (a-r) \frac{(a+r)}{(a-r)} \cos \theta_0 \\ &= (a+r) \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (15)$$

这表明 $u=\pi, \theta_1=\arccos \left[\frac{(a+r)}{(a-r)} \cos \theta_0 \right]$ 满足(13), 即这条测地线必与纬圆 $u=\pi$ 相交。证毕。

例 55 若在曲面上, 存在两族互相正交的曲线, 每族内曲线的测地曲率都是绝对常数, 求证: 此曲面必是负常 Gauss 曲率曲面或可展曲面。

证明 选择这两族互相正交的曲线为参数曲线网, 那么曲面的第一基本形式

$$I = E du^2 + G dv^2. \quad (1)$$

设 u 曲线的测地曲率为常数 a , v 曲线的测地曲率为常数 b . 从计算测地曲率的 Liouville 公式, 可以得到

$$k_{01} = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} = a, \quad (2)$$

$$k_{02} = \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} = b. \quad (3)$$

从(2), 有

$$-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \ln \sqrt{E}}{\partial v} = a,$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = -a, \quad (4)$$

换句话说

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = -a\sqrt{E}. \quad (5)$$

从上式,有

$$\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right]_u = -a(\sqrt{E})_u. \quad (6)$$

从(3),有

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} (\sqrt{G})_u = b, \quad (7)$$

即

$$\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} = b\sqrt{G}. \quad (8)$$

那么,

$$\left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right]_u = b(\sqrt{G})_u.$$

由 Gauss 方程, 曲面的 Gauss 曲率

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right]_u + \left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right]_v \right\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{EG}} [-a(\sqrt{E})_v + b(\sqrt{G})_u] \\ &= -(\alpha^2 + b^2). \end{aligned}$$

当 $a=b=0$ 时, $K=0$, 曲面为可展曲面; 当 a, b 不全为零, K 是负常数. 曲面是负常 Gauss 曲率曲面. 证毕.

注 本题条件可减弱为: 曲面上有两族具绝对常数测地线的曲线, 而且这两族曲线相交于定角 θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$).

我们取其中一族曲线为 u 曲线, v 曲线由它的正交轨线. 由计算测地曲率的 Liouville 公式, 对于 u 曲线, 公式(2)仍立. 由于另一族曲线的测地曲率是绝对常数, 同样由 Liouville 公式,

$$\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin \theta = c \quad (绝对常数). \quad (11)$$

由条件, θ 是常数. 那么从(2)和(11), 有

$$a \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin \theta = c. \quad (12)$$

由于 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta > 0$, 令

$$b = \frac{c - a \cos \theta}{\sin \theta}, \quad (13)$$

b 也是常数, 从(12), 有

$$\frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} = b. \quad (14)$$

公式(14)就是公式(3), 所以曲面的 Gauss 曲率仍然是零或负常数.

例 56 求证: 测地曲率 k_g 等于常数的球面曲线必定是圆弧. 证明 设此曲线的曲率和挠率分别为 k, τ . 由于球面上任何方向的法曲率

$$k_n = \pm \frac{1}{R},$$

这里 R 是球面的半径, 所以

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2 = \text{正常数}. \quad (1)$$

即 k 是正常数. 下面证明 $\tau = 0$. 用反证法, 若 $\tau \neq 0$, 则此球面曲线的向量表示 $r = r(s)$ (s 是弧长)有分解式

$$\begin{aligned} r'(s) &= -\frac{1}{k(s)} N(s) - \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k(s)} \right) \frac{1}{\tau(s)} B(s) \\ &= -\frac{1}{k(s)} N(s). \end{aligned} \quad (2)$$

(2)式对弧长 s 求导, 利用 $k(s)$ 是正常数, 有

$$\mathbf{T}(s) = -\frac{1}{h(s)} [-k(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s)]$$

$$= \mathbf{T}(s) - \frac{\tau(s)}{h(s)} \mathbf{B}(s). \quad (3)$$

由于假设 $\tau(s) \neq 0$, 我们得一矛盾. 所以这球面曲线必是平面曲线, 一定是圆弧. 证毕.

例 57 求证: 曲面 S 上的测地圆均具有常测地曲率的充分必要条件是 S 为常 Gauss 曲率的曲面.

证明 取曲面 S 上的测地极坐标系 (ρ, θ) . 这时, 曲面上的第一基本形式

$$I = d\rho^2 + G(\rho, \theta)d\theta^2. \quad (1)$$

测地圆的测地曲率可以用计算测地曲率的 Liouville 公式

$$k_g = \frac{d\rho}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial \theta} \cos \varphi + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial \rho} \sin \varphi, \quad (2)$$

在这里 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $E=1$. 从(2)有

$$k_g = -\frac{1}{2G} G_\rho. \quad (3)$$

在本题, 任何测地圆具有常测地曲率. 那么, 从(3), 沿每个测地圆有

$$\frac{G_\rho}{G} = \text{常数}. \quad (4)$$

(4)式两端对 θ 求导, 去分母后, 有

$$G_{\rho\theta}G - G_\rho G_\theta = 0. \quad (5)$$

由于任何一点均有测地圆通过, 所以(5)对定义域中任何 (ρ, θ) 都成立, 将(5)对 ρ 求导, 有

$$G_{\rho\rho\theta}G - G_{\rho\theta}G_\rho = 0. \quad (6)$$

另一方面, 由 Gauss 方程, 曲面 S 的 Gauss 曲率

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}} = -\frac{1}{4G^2} (G_\rho^2 - 2GG_{\rho\rho}). \quad (7)$$

上式两端对 θ 求导, 有

$$\begin{aligned} K_\theta &= -\frac{1}{4G^3} [2(G_\rho G_{\rho\theta} - G_\theta G_\rho - GG_{\rho\rho\theta})G^2 - 2GG_\rho(G_\rho^2 - 2GG_{\rho\rho})] \\ &= -\frac{1}{2G^3} [G(G_\rho G_{\rho\theta} - GG_{\rho\rho\theta}) + G_\rho(GG_{\rho\theta} - G_\rho G_\theta)] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

公式(8)表明, 沿测地圆, Gauss 曲率 K 为常数. 由于在曲面 S 上, 测地圆的中心位置可以任取, 沿任何方向均有测地圆通过. 现取同心的测地圆族 $\{O_\alpha\}$, 再取另一测地圆 O 与它们都相交, 由(8), 在每一个 O_α 上, K 为常数, 而在 O 上, K 也为常数, 而 O 与每一 O_α 都相交, 所以, 此常数就与测地圆无关, 是一个绝对常数. 这表明曲面 S 的 Gauss 曲率 K 是常数.

如果曲面 S 的 Gauss 曲率 K 是常数, 那么曲面 S 的第一基本形式在测地极坐标下是下列三种情况之一

$$\begin{aligned} I &= d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (K \text{ 是零}), \\ I &= d\rho^2 + a^2 \sin^2 \frac{\rho}{a} d\theta^2 \quad \left(K \text{ 是 } \frac{1}{a^2}\right), \\ I &= d\rho^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\rho}{a} d\theta^2 \quad \left(K \text{ 是 } -\frac{1}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

那么, 利用 Liouville 公式, 测地圆的测地曲率

$$k_g = \frac{1}{2} \frac{G_\rho}{G} \quad (10)$$

均与 θ 无关, 即为常测地曲率. 证毕.

下面我们再举两例, 用以结束对曲面上渐近曲线, 曲率线和测地线这三类重要曲线的讨论.

例 58 任意给出一条空间挠曲线 O , 试过曲线 O 作三张正则

曲面,使曲线 O 分别为所作曲面上的测地线,渐近曲线和曲率线.

解 设曲线 $O: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u), u$ 为曲线 O 的弧长, $\mathbf{T}(u), \mathbf{N}(u), \mathbf{B}(u)$ 为曲线 O 的 Frenet 标架.

① 作曲线 O 的从法线曲面 S_1 :

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u) + v\mathbf{B}(u). \quad (1)$$

由微分,可以得到

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{T}(u) - v\tau(u)\mathbf{N}(u), \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{B}(u),$$

这里 $\tau(u)$ 是曲线 O 的挠率.

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -\mathbf{N}(u) - v\tau(u)\mathbf{T}(u) \neq 0. \quad (3)$$

这表明 S_1 是正则曲面,在曲面 S_1 上,沿曲线 O , 曲面 S_1 的單位法向量 $\mathbf{n}(u, 0)$ 平行于 $(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u, 0)$, 即 $\mathbf{n}(u, 0)$ 平行于 $-\mathbf{N}(u)$, 所以曲线 O 是曲面 S_1 的测地线.

② 作曲线 O 的主法线曲面 S_2 :

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u) + v\mathbf{N}(u). \quad (4)$$

由微分,可以看到

$$\mathbf{r}_u = [1 - v\kappa(u)]\mathbf{T}(u) + v\tau(u)\mathbf{B}(u), \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{N}(u),$$

这里 $\kappa(u)$ 是曲线 O 的曲率.

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [1 - v\kappa(u)]\mathbf{B}(u) - v\tau(u)\mathbf{T}(u). \quad (6)$$

由于 O 是空间挠曲线, $\tau(u) \neq 0$, 所以, 曲面 S_2 是正则曲面. 沿曲线 O , 有 $\mathbf{n}(u, 0)$ 平行于 $(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u, 0)$, 换句话说, $\mathbf{n}(u, 0)$ 平行于 $\mathbf{B}(u)$, 所以曲线 O 是曲面 S_2 的渐近曲线.

③ 作直纹面 S_3 :

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u) + v[-\sin\theta(u)\mathbf{N}(u) + \cos\theta(u)\mathbf{B}(u)],$$

这里 $\theta(u)$ 满足条件

$$\frac{d\theta(u)}{du} + \tau(u) = 0. \quad (8)$$

由于 (7) 可以改写为

$$\mathbf{r}(u, v)$$

$$\begin{aligned} &= \rho(u) + v \left[\cos\left(\theta(u) + \frac{\sigma}{2}\right) \mathbf{N}(u) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\theta(u) + \frac{\sigma}{2}\right) \mathbf{B}(u) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

和 (8) 可以改写为

$$\frac{d\left(\theta(u) + \frac{\sigma}{2}\right)}{du} + \tau(u) = 0. \quad (10)$$

利用本章 §2 例 33 的结论, 可知曲面 S_3 是可展曲面. 容易看到

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u, 0) &= \mathbf{T}(u) \times [-\sin\theta(u)\mathbf{N}(u) + \cos\theta(u)\mathbf{B}(u)] \\ &= -[\sin\theta(u)\mathbf{B}(u) + \cos\theta(u)\mathbf{N}(u)]. \end{aligned} \quad (11)$$

同样, 由例 33 的结论, 可以知道曲面 S_3 上曲线 O 的法线所生成的直纹面 S_4

$$\mathbf{r}(u, v) = \rho(u) + (-v)[\cos\theta(u)\mathbf{N}(u) + \sin\theta(u)\mathbf{B}(u)] \quad (12)$$

也是可展曲面, 那么曲线 O 是曲面 S_3 的一条曲率线. 解毕.

例 59 对曲面 S 上的曲线 O , 记 O 的主法向量 $\mathbf{N}(s)$ 到曲面在 O 的单位法向量 $\mathbf{n}(s)$ 的有向夹角为 $\theta(s)$, 并设曲线 O 的曲率和挠率分别为 $\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$, 求证: 沿曲线 O , 法曲率

$$\kappa_n(s) = \kappa(s)\cos\theta(s),$$

测地曲率 $\kappa_g(s) = \kappa(s)\sin\theta(s)$, 测地挠率

$$\tau_g(s) = \frac{d\theta(s)}{ds} + \tau(s).$$

这里 s 是曲线 O 的弧长.

证明 我们可假定 $\theta(s)$ 为连续可微函数. 由题目条件, 可

知道

$$\mathbf{n}(s) = \cos \theta(s) \mathbf{N}(s) + \sin \theta(s) \mathbf{B}(s) \quad (1)$$

$$\mathbf{n}(s) \times \mathbf{T}(s) = \sin \theta(s) \mathbf{N}(s) - \cos \theta(s) \mathbf{B}(s) \quad (2)$$

因此

$$\mathbf{N}(s) = \sin \theta(s) (\mathbf{n}(s) \times \mathbf{T}(s)) + \cos \theta(s) \mathbf{n}(s), \quad (3)$$

$$\mathbf{B}(s) = -\cos \theta(s) (\mathbf{n}(s) \times \mathbf{T}(s)) + \sin \theta(s) \mathbf{n}(s). \quad (4)$$

根据曲线论的 Frenet 公式, 并注意到 (3), 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} &= k(s) \mathbf{N}(s) \\ &= k(s) [\sin \theta(s) (\mathbf{n}(s) \times \mathbf{T}(s)) + \cos \theta(s) \mathbf{n}(s)]. \end{aligned} \quad (5)$$

然而, 我们知道

$$\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} = k_g(s) (\mathbf{n}(s) \times \mathbf{T}(s)) + k_n(s) \mathbf{n}(s). \quad (6)$$

将 (5) 与 (6) 比较, 有

$$k_g(s) = k(s) \sin \theta(s), \quad k_n(s) = k(s) \cos \theta(s). \quad (7)$$

将 (1) 对 s 求导, 有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} &= [-\sin \theta(s) \mathbf{N}(s) + \cos \theta(s) \mathbf{B}(s)] \frac{d\theta(s)}{ds} \\ &\quad + \cos \theta(s) [-k(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s)] \\ &\quad - \tau(s) \sin \theta(s) \mathbf{N}(s) \\ &= -k(s) \cos \theta(s) \mathbf{T}(s) \\ &\quad - \left[\frac{d\theta(s)}{ds} + \tau(s) \right] [\sin \theta(s) \mathbf{N}(s) - \cos \theta(s) \mathbf{B}(s)] \end{aligned}$$

$$= -k(s) \cos \theta(s) \mathbf{T}(s) - \left[\frac{d\theta(s)}{ds} + \tau(s) \right] \mathbf{n}(s) \times \mathbf{T}(s) \quad (8)$$

测地挠率

$$\begin{aligned} \tau_g(s) &= \frac{dn(s)}{ds} \cdot (\mathbf{T}(s) \times \mathbf{n}(s)) \\ &= -\frac{d\theta(s)}{ds} + \tau(s). \end{aligned} \quad (9)$$

证毕.

§ 7 极小曲面

极小曲面在微分几何的发展史上一直是个引人注目的专题, 自 Lagrange 于 1760 年首先给出极小曲面这个概念以后的二百年里, 极小曲面的理论已发展成微分几何中一个硕果累累, 内容丰富的分支. 我们这里只能就其基本定义介绍一些例题.

例 60 曲面 S 方程是 $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u) + k(v))$, 这里 k 是正常数, $u > 0$. 求一个可微函数 $f(u)$, 使得曲面 S 是一个极小曲面.

解 逐次求导, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \left(\cos v, \sin v, \frac{df(u)}{du} \right), \\ \mathbf{r}_v &= (-u \sin v, u \cos v, k), \\ \mathbf{r}_{uu} &= \left(0, 0, \frac{d^2 f(u)}{du^2} \right), \\ \mathbf{r}_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) \\ \mathbf{r}_{vv} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0). \end{aligned} \quad (1)$$

于是, 曲面 S 的第一基本形式系数

$$E = \mathbf{r}_u^2 = 1 + \left(\frac{df(u)}{du} \right)^2,$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = k \frac{df(u)}{du}, \quad (2)$$

$$G = \mathbf{r}_v^2 = k^2 + u^2.$$

由直接计算,可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \left(k \sin v - u \frac{df(u)}{du} \cos v, \right. \\ &\quad \left. - \left(k \cos v + u \frac{df(u)}{du} \sin v \right), u \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= -\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left(k \sin v - u \frac{df(u)}{du} \cos v, \right. \\ &\quad \left. - \left(k \cos v + u \frac{df(u)}{du} \sin v \right), u \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{这里 } \Delta = \left[k^2 + u^2 + u^2 \left(\frac{df(u)}{du} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

曲面 S 的第二基本形式系数

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uu} = \frac{u}{\Delta} \frac{d^2 f(u)}{du^2}, \quad (5)$$

$$M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uv} = -\frac{k}{\Delta},$$

$$N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{vv} = \frac{u^2}{\Delta} \frac{df(u)}{du}. \quad (6)$$

要使曲面 S 是极小曲面, 应当有

$$EN - 2FM + LG = 0.$$

利用(2)和(5), 函数 $f(u)$ 应当满足

$$u(u^2 + k^2) \frac{d^2 f(u)}{du^2} + (2k^2 + u^2) \frac{df(u)}{du} + u^2 \left(\frac{df(u)}{du} \right)^2 = 0. \quad (7)$$

令

$$z = \left(\frac{df(u)}{du} \right)^{-2}, \quad (8)$$

则

$$\frac{dz}{du} = -2 \left(\frac{df(u)}{du} \right)^{-3} \frac{d^2 f(u)}{du^2}. \quad (9)$$

(7) 两端乘以 $\left(\frac{df(u)}{du} \right)^{-3}$, 再利用(8), (9)有

$$\frac{1}{2} u(u^2 + k^2) \frac{dz}{du} - (2k^2 + u^2) z = u^2. \quad (10)$$

先解相应的齐次方程

$$\frac{1}{2} u(u^2 + k^2) \frac{dz}{du} - (2k^2 + u^2) z = 0. \quad (11)$$

分离变量

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} &= \frac{2(2k^2 + u^2)}{u(u^2 + k^2)} du \\ &= \frac{4}{u} du - \frac{2u du}{u^2 + k^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

(12) 两端积分, 有

$$\ln z = 4 \ln u - \ln(u^2 + k^2) + \ln c_1, \quad (13)$$

这里 c_1 是一个正常数. 于是,

$$z = \frac{c_1 u^4}{u^2 + k^2}. \quad (14)$$

利用常数变易法, 将 c_1 看作 u 的函数, (14) 对 u 求导, 有

$$\frac{dz}{du} = \frac{2c_1 u^3}{(u^2 + k^2)^2} (2k^2 + u^2) + \frac{u^4}{u^2 + k^2} \frac{dc_1}{du}. \quad (15)$$

将(14)和(15)代入(10), 有

$$\frac{dc_1}{du} = \frac{2}{u^3}. \quad (16)$$

积分(16), 有

$$c_1 = -\frac{1}{u^2} + c_2, \quad (17)$$

这里 c_2 是一个正常数.

将(8)和(17)代入(14), 有

$$\left(\frac{df(u)}{du}\right)^{-2} = \frac{(c_2 u^2 - 1)u^2}{u^2 + k^2}. \quad (18)$$

由于只要求一个解, 从上式, 得

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{u^2 + k^2}{c_2 u^2 - 1}}. \quad (19)$$

积分上式, 有

$$f(u) = \int_a^u \frac{1}{t} \sqrt{\frac{t^2 + k^2}{c_2 t^2 - 1}} dt + c_3, \quad (20)$$

这里 a 是一个正常数, 且 $c_2 a^2 > 1$; $u > a$, c_3 是一个常数.

下面我们来计算(20)右端的那个积分. 令

$$y = \sqrt{\frac{t^2 + k^2}{c_2 t^2 - 1}}. \quad (21)$$

两边平方, 有

$$t^2 = \frac{k^2 + y^2}{c_2 y^2 - 1}. \quad (22)$$

两端开方, 利用 $t > 0$, 有

$$t = \sqrt{\frac{k^2 + y^2}{c_2 y^2 - 1}}. \quad (23)$$

微分上式, 有

$$dt = -\frac{(1 + c_2 k^2)}{t} \frac{y dy}{(c_2 y^2 - 1)^2}. \quad (24)$$

利用上述代换, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t} \sqrt{\frac{t^2 + k^2}{c_2 t^2 - 1}} dt \\ = -(1 + c_2 k^2) \int \frac{y^2 dy}{(k^2 + y^2)(c_2 y^2 - 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\int \left[\frac{k^2}{k^2 + y^2} + \frac{1}{2(\sqrt{c_2 y - 1})} - \frac{1}{2(\sqrt{c_2 y + 1})} \right] dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{c_2}} \ln \frac{\sqrt{c_2 y + 1}}{\sqrt{c_2 y - 1}} - k \operatorname{arctg} \frac{y}{k}, \end{aligned} \quad (25)$$

这里 $y = \sqrt{\frac{t^2 + k^2}{c_2 t^2 - 1}}$. 记(25)右端为 $F(t)$, 那么,

$$\int_a^u \frac{1}{t} \sqrt{\frac{t^2 + k^2}{c_2 t^2 - 1}} dt = F(u) - F(a). \quad (26)$$

所以

$$f(u) = F(u) - F(a) + c_3 \quad (27)$$

是满足题目条件的一个解. 解毕.

例 61 设曲面 $S: \mathbf{r}(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3, 3v + 3u^2v - v^3, 3(u^2 - v^2))$, 这里 $(u, v) \in R^2$.

(i) 求证: 曲面 S 是极小曲面.

(ii) 求证: 曲率线是平面曲线, 并且求出曲率线所在的平面方程.

(iii) 求出曲面 S 的渐近曲线.

证明和解 (i) $\mathbf{r}_u = (3(1 + v^2 - u^2), 6uv, 6u)$

$$\mathbf{r}_v = (6uv, 3(1 + u^2 - v^2), -6v),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (-6u, 6v, 6),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = (6v, 6u, 0)$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (6u, -6v, -6),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-18u(1 + u^2 + v^2), 18v(1 + u^2 + v^2),$$

$$9(1 + u^2 + v^2)(1 - u^2 - v^2)),$$

$$n = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

$$= \frac{1}{1 + u^2 + v^2} (-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2). \quad (1)$$

于是曲面 S 的第一、二基本形式系数

$$E = r_u^2 = 9(1+u^2+v^2)^2,$$

$$F = r_u \cdot r_v = 0,$$

$$G = r_v^2 = 9(1+u^2+v^2)^2;$$

$$L = n \cdot r_{uu} = 6,$$

$$M = n \cdot r_{uv} = 0,$$

$$N = n \cdot r_{vv} = -6.$$

利用(2), 立即有

$$EN - 2FM + LG = 0,$$

曲面 S 是极小曲面

(ii) 从(1)的计算, 可以知道参数曲线网是曲率线网. 又因

$$r_{uvu} = (-6, 0, 0)$$

$$r_{vvo} = (0, -6, 0).$$

$$r_u \times r_{uv} = (0, -18(1+u^2+v^2), 18v(1+u^2+v^2)),$$

$$r_v \times r_{vv} = (-18(1+u^2+v^2), 0, -18u(1+u^2+v^2)).$$

从(4)和(5), 容易看到

$$(r_u, r_{uv}, r_{uvu}) = 0,$$

$$(r_v, r_{vv}, r_{vvo}) = 0.$$

从曲线论中挠率的计算公式, 由(6)可以看出, u 曲线和 v 曲线的挠率全为零, 所以 u 曲线和 v 曲线全是平面曲线.

对于一条 u 曲线, 它在平面的法向量平行于 $r_u \times r_{uv}$, 从(5)一式, 我们可取 u 曲线的所在平面的法向量是 $(0, -1, v)$, 所这平面方程是

$$-(y-3v-3u^2v+v^3)+v(z-3u^2+3v^2)=0.$$

上式, 有

$$-y+yz+v(3+2v^2)=0.$$

类似地, 对于一条 v 曲线, 它所在平面的法向量可取 $(1, 0, u)$, 那么, 这平面方程是

$$(x-3u-3uv^2+u^3)+u(z-3u^2+3v^3)=0. \quad (9)$$

化简后, 有

$$x+uz-u(3+2u^2)=0. \quad (10)$$

(iii) 由公式(2), 曲面 S 的渐近曲线微分方程满足

$$6(dw^2-dv^2)=0. \quad (11)$$

那么, 有二等式

$$du+dv=0, \text{ 或者 } du-dv=0. \quad (12)$$

因此, 曲面 S 的两族渐近曲线是

$$u+v=c_1, \quad u-v=c_2, \quad (13)$$

这里 c_1, c_2 是常数. 解毕.

注 本例所给的曲面称 Enneper 曲面, 它是极小曲面理论中一个重要的实例, 有许多有趣的性质.

例 62 设极小曲面 S 的第一基本形式为

$$I = \cosh^2 t (d\theta^2 + dt^2),$$

O 为曲面 S 上的任意正则曲线, 试求曲面 S 的切平面沿曲线 O 变化时的转动率.

解 利用曲面论的 Gauss 方程, 曲面 S 的 Gauss 曲率

$$K = -\frac{1}{\cosh^2 t} \left[\frac{(\cosh t)_t}{\cosh t} \right]_t = -\frac{1}{\cosh^3 t}. \quad (1)$$

曲面 S 的第一、二、三基本形式间有关系式

$$II - 2HI + K I = 0. \quad (2)$$

在本题 $H=0$, 把(1)代入(2), 有

$$\left(\frac{dn}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\cosh^4 t}. \quad (3)$$

所求的转动率

$$\left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} \right| = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}. \quad (4)$$

解毕.

例 63 设 $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 是曲面 S 的等温参数表示. 求证: 曲面 S 是极小曲面的充要条件为: 坐标函数 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 均满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

证明 利用 Gauss 公式,

$$\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = \sum_{k=1}^2 (I_{11}^k + I_{22}^k) \mathbf{r}_k + (L + N) \mathbf{n}. \quad (1)$$

又等温参数 (u, v) 构成正交参数曲线网, 而且 $E = \mathbf{r}_u^2 = \mathbf{r}_v^2 = G$, 那么

$$I_{11}^1 + I_{22}^1 = \frac{E_u}{2E} - \frac{G_u}{2E} = 0, \quad (2)$$

$$I_{11}^2 + I_{22}^2 = -\frac{E_v}{2G} + \frac{G_v}{2G} = 0.$$

所以, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} &= (L + N) \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2EG} (LG + EN) 2E \mathbf{n} = 2H E \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3)$$

因而

$$\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 0$$

当且仅当平均曲率

$$H = 0.$$

这就是本题的结论. 证毕.

例 64 求形式为 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的极小曲面.

解 将所求曲面写成向量形式

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(u, v, f\left(\frac{v}{u}\right) \right) \quad (1)$$

令 $t = \frac{v}{u}$, 则 $\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{v}{u^2}$, $\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{u}$, 由计算,

$$\mathbf{r}_u = \left(1, 0, -\frac{df(t)}{dt} \frac{v}{u^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_v = \left(0, 1, \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{u} \right),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = \left(0, 0, \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \frac{v^2}{u^4} + 2 \frac{df(t)}{dt} \frac{v}{u^3} \right),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = \left(0, 0, -\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \frac{v}{u^3} - \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{u^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = \left(0, 0, \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \frac{1}{u^2} \right). \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\frac{df(t)}{dt} \frac{v}{u^2}, -\frac{df(t)}{dt} \frac{1}{u}, 1 \right),$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{df(t)}{dt} \frac{v}{u^2}, -\frac{df(t)}{dt} \frac{1}{u}, 1 \right), \end{aligned}$$

$$\text{这里 } \Delta = \left[1 + \left(\frac{1}{u^2} + \frac{v^2}{u^4} \right) \left(\frac{df(t)}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

因而曲面的第一、二基本形式系数分别是

$$E = \mathbf{r}_u^2 = 1 + \left(\frac{df(t)}{dt} \right)^2 \frac{v^2}{u^4},$$

$$F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = -\left(\frac{df(t)}{dt} \right)^2 \frac{v}{u^3},$$

$$G = \mathbf{r}_v^2 = 1 + \left(\frac{df(t)}{dt} \right)^2 \frac{1}{u^2};$$

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uu} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \frac{v^2}{u^4} + 2 \frac{df(t)}{dt} \frac{v}{u^3} \right], \quad (2)$$

$$M = n \cdot r_{\omega} = -\frac{1}{\Delta} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \frac{v}{v^3} + \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{v^2} \right],$$

$$N = n \cdot r_{\omega} = \frac{1}{\Delta} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \frac{1}{v^2}.$$

由于曲面是极小曲面,则应当有

$$LG - 2FM + NE = 0. \quad (3)$$

将(2)代入(3),并注意到 $t = \frac{v}{u}$, 有

$$(1+t^2) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2t \frac{df(t)}{dt} = 0. \quad (4)$$

令 $z^* = \frac{df(t)}{dt}$, 则 $\frac{dz^*}{dt} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$, (4)变形为

$$\frac{dz^*}{z^*} + \frac{2t dt}{1+t^2} = 0. \quad (5)$$

两端积分,有

$$\ln |z^*| + \ln(1+t^2) = \ln |c|, \quad (6)$$

这里 c 是非零常数. 从(6), 有

$$z^*(1+t^2) = c. \quad (7)$$

那么,

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{c}{1+t^2}. \quad (8)$$

积分(8), 有

$$f(t) = c \arctan t, \quad (9)$$

因而我们有

$$z = c \arctan \frac{y}{x}. \quad (10)$$

不难看出, 这种极小曲面就是正螺面. 解毕.

§ 8 三种特殊曲面

本节要讲述三种特殊曲面: (1) 常平均曲率的旋转曲面, (2)

行曲面. (3) Weingarten 曲面.

例 65 半个椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$ ($x > 0$, a, b 是正常数, $a > b$) 在 x 轴上无滑动地滚动, 椭圆的一个焦点画出一条曲线 L , 曲线 L 绕 x 轴旋转, 得旋转曲面 S , 求曲面 S 的平均曲率.

解 题目中半个椭圆的向量形式是

$$\rho(\theta) = (a \cos \theta, b(1 + \sin \theta)), \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right). \quad (1)$$

在初始位置, 这椭圆的两个焦点分别是 $(-c, b)$ 和 (c, b) , 这里 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

我们不妨考虑焦点 (c, b) , 关于椭圆的另一焦点, 只须把 c 改为 $-c$, 情况完全一样.

从原点 O 沿椭圆按逆时针方向到点 $A(a \cos \theta, b(1 + \sin \theta))$ 的椭圆弧长是

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \quad (2)$$

设过 A 点的椭圆切线(射线) l 与 x 轴正向交角为 ψ ($0 < \psi < \pi$). 我们微分椭圆方程, 有

$$\frac{x dx}{a^2} + \frac{(y-b) dy}{b^2} = 0. \quad (3)$$

那么, 利用(1)和(3), 在 A 点的椭圆切线斜率

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \theta. \quad (4)$$

从而

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \theta. \quad (5)$$

当 $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0$ 时, $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$, 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$,

再利用

$$|\cos \psi| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}, \quad |\sin \psi| = \sqrt{1 - \cos^2 \psi}, \quad (6)$$

和(5), 可以得到

$$\begin{cases} \cos \psi = -\frac{a \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}, \\ \sin \psi = \frac{b \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}. \end{cases} \quad (7)$$

在初始位置, 两焦点连线与 x 轴平行, 这连线与射线 l 的交角也是 ψ . 直线 l 的方程是

$$y - b(1 + \sin \theta) = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \theta (x - a \cos \theta).$$

由上式, 得

$$b \cos \theta x + a \sin \theta y - ab(1 + \sin \theta) = 0. \quad (8)$$

设直线 l 与两焦点连线的交点坐标是 (x, y) , 显然 $y = b$. 从

(8), 有 $x = \frac{a}{\cos \theta}$. 这交点与 A 点之间的距离

$$\begin{aligned} |d^*| &= \sqrt{\left(\frac{a}{\cos \theta} - a \cos \theta\right)^2 + b^2 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\sin^2 \theta (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)}. \end{aligned} \quad (9)$$

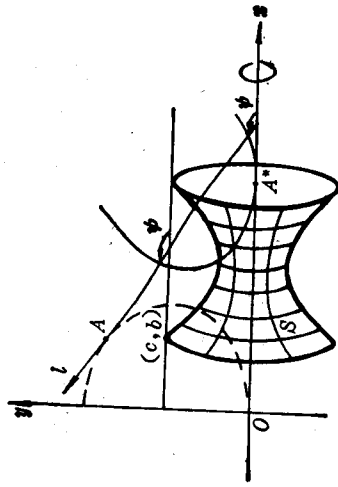


图 5

令

$$d^* = -\operatorname{tg} \theta \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \quad (10)$$

d^* 称为向距离.

椭圆焦点 (c, b) 与这交点 $\left(\frac{a}{\cos \theta}, b\right)$ 的距离是

$$D = \frac{a}{\cos \theta} - c. \quad (11)$$

这椭圆在 x 轴上无滑动地滚动. 在某时刻, 点 A 滚动到与 x 轴上某点 A^* 重合, 那么 A^* 的坐标应当是 $(L, 0)$. 两焦点连线与 x 轴正向交角是 ψ . 在这时刻, 设椭圆焦点滚动到 $(x^*(\theta), y^*(\theta))$, 那么,

$$\begin{cases} x^*(\theta) = L + d^* - D \cos \psi, \\ y^*(\theta) = D \sin \psi. \end{cases} \quad (12)$$

利用(2), (7), (10)和(11), 有

$$\begin{aligned} x^*(\theta) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &\quad + \frac{\sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} [(a^2 - b^2) \cos \theta - ac], \quad (13) \\ y^*(\theta) &= \frac{b(a - c \cos \theta)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}. \end{aligned}$$

xy 平面上曲线 $(x^*(\theta), y^*(\theta))$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 绕 x 轴旋转所得旋转曲面 S 的向量形式

$$\mathbf{r}(\theta, v) = (x^*(\theta), y^*(\theta) \cos v, y^*(\theta) \sin v). \quad (14)$$

逐次求导, 有

$$\mathbf{r}_\theta = \left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta}, \frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \cos v, \frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \sin v \right),$$

$$\mathbf{r}_v = (0, -y^*(\theta) \sin v, y^*(\theta) \cos v),$$

$$\mathbf{r}_{\theta\theta} = \left(\frac{d^2 x^*(\theta)}{d\theta^2}, \frac{d^2 y^*(\theta)}{d\theta^2} \cos v, \frac{d^2 y^*(\theta)}{d\theta^2} \sin v \right),$$

曲面 S 的平均曲率

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

$$= \frac{1}{2y^*(\theta) \left[\left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}} \cdot \left\{ \frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \left[\left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 \right] + y^*(\theta) \left(\frac{d^2x^*(\theta)}{d\theta^2} \frac{dy^*(\theta)}{d\theta} - \frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \frac{d^2y^*(\theta)}{d\theta^2} \right) \right\}. \quad (18)$$

下面我们利用(13)来具体计算上式右端各项.

$$\begin{aligned} \frac{dx^*(\theta)}{d\theta} &= \frac{ab^2}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} (a - c \cos \theta) \\ &= \frac{ab}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} y^*(\theta), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy^*(\theta)}{d\theta} &= -\frac{abc \sin \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} (a - c \cos \theta) \\ &= -\frac{c \sin \theta}{b} \frac{dx^*(\theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 &= \frac{a^2 b^2 (a - c \cos \theta)^2}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2} \\ &= \left(1 + \frac{c^2 \sin^2 \theta}{b^2} \right) \left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

从(20), 我们有

$$\frac{d^2y^*(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{c \cos \theta}{b} \frac{dx^*(\theta)}{d\theta} + \frac{c \sin \theta}{b} \frac{d^2x^*(\theta)}{d\theta^2}. \quad (22)$$

利用(19)、(20)、(21)和(22), 可以得到

$$\mathbf{r}_{\theta\theta} = \left(0, -\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \sin v, \frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \cos v \right), \quad (15)$$

$$\mathbf{r}_{v\theta} = (0, -y^*(\theta) \cos v, -y^*(\theta) \sin v).$$

于是,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_v &= \left(y^*(\theta) \frac{dy^*(\theta)}{d\theta}, -\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} y^*(\theta) \cos v, \right. \\ &\quad \left. -\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} y^*(\theta) \sin v \right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_v|} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2}} \cdot \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta}, -\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \cos v, -\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \sin v \right).$$

曲面 S 的第一、二基本形式系数

$$E = \mathbf{r}_\theta^2 = \left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2,$$

$$F = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_v = 0,$$

$$G = \mathbf{r}_v^2 = (y^*(\theta))^2;$$

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{\theta\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2}} \cdot \left(\frac{d^2x^*(\theta)}{d\theta^2} \frac{dy^*(\theta)}{d\theta} - \frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \frac{d^2y^*(\theta)}{d\theta^2} \right),$$

$$M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{\theta v} = 0,$$

$$N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{vv}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2}} y^*(\theta) \frac{d^2x^*(\theta)}{d\theta^2}. \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2x^*(\theta)}{d\theta^2} \frac{dy^*(\theta)}{d\theta} - \frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \frac{d^2y^*(\theta)}{d\theta^2} \\
&= -\frac{c \cos \theta}{b} \left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 \\
&= -\frac{c \cos \theta}{b} \left(1 + \frac{c^2 \sin^2 \theta}{b^2} \right)^{-1} \\
&\quad \cdot \left[\left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 \right] \\
&= -\frac{bc \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \left[\left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

(23)

利用(19)、(23)和(21),我们有

$$\begin{aligned}
& \frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \left[\left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 \right] \\
&+ y^*(\theta) \left(\frac{d^2x^*(\theta)}{d\theta^2} \frac{dy^*(\theta)}{d\theta} - \frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \frac{d^2y^*(\theta)}{d\theta^2} \right) \\
&= y^*(\theta) \left[\left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 \right] \\
&\quad \cdot \left(\frac{ab}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} - \frac{bc \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \right) \\
&= \frac{1}{a} y^*(\theta) \left[\left(\frac{dx^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy^*(\theta)}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}.
\end{aligned}$$

将(24)代入(18),有

$$H = -\frac{1}{2a}. \quad (25)$$

解毕.

注 本题曲面 S 的平均曲率是常数 $\frac{1}{2a}$, 与椭圆短半轴 b 无关, 这结果在十九世纪由 Delaunay 所得到. 当然, 一支双曲线和一条抛物线也可以沿直线无滑动地滚动, 其焦点所画出的曲线也可绕这直线旋转, 所得的旋转曲面的平均曲率是否也为常数呢? 有

感兴趣的读者不妨试试.

现在我们来研究平行曲面.

已知曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. 引入曲面 S_λ ,

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \lambda \mathbf{n}(u, v), \quad (1)$$

这里 λ 是常数, $\mathbf{n}(u, v)$ 是曲面 S 在 $\mathbf{r}(u, v)$ 处的单位法向量, 曲面 S_λ 称为曲面 S 的平行曲面. 记 H, K 分别是曲面 S 的平均曲率和 Gauss 曲率. 在下例中, 我们要求 λ 满足条件

$$1 - 2\lambda H + \lambda^2 K > 0. \quad (2)$$

显然 S_0 就是 S , 对于不同的 λ , 一般 S_λ 是不相同的.

例 66 曲面 S_λ 是曲面 S 的平行曲面. 求证:

(i) S 是全脐点曲面的充要条件是平行曲面 S_λ 是全脐点曲面;

(ii) S 是可展曲面的充要条件是平行曲面 S_λ 是可展曲面;

(iii) S_λ 是极小曲面的充要条件是曲面 S 的 Gauss 曲率 K 和平均曲率 H 满足 $H = \lambda K$;

(iv) S 是无平点极小曲面的充要条件是平行曲面 S_λ 的两个主曲率 k_1^* 和 k_2^* 满足关系式

$$\frac{1}{k_1^*} + \frac{1}{k_2^*} = -2\lambda;$$

(v) 如果 S_λ 的 Gauss 曲率 $K_\lambda = \frac{1}{\lambda^2}$, 则曲面 S 的平均曲率 H 是常数;

(vi) 无脐点曲面 S 上曲率线与平行曲面 S_λ 上曲率线互相对应.

证明 我们先导出有关曲面 S_λ 的平均曲率和 Gauss 曲率的公式. 对于曲面 S_λ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u^* &= \mathbf{r}_u + \lambda \mathbf{n}_u, & \mathbf{r}_v^* &= \mathbf{r}_v + \lambda \mathbf{n}_v, \\
\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^* &= (\mathbf{r}_u + \lambda \mathbf{n}_u) \times (\mathbf{r}_v + \lambda \mathbf{n}_v).
\end{aligned} \quad (3)$$

利用曲面论中 Weingarten 公式, 有

$$\begin{aligned} n_u &= -(\omega_1^1 r_u + \omega_1^2 r_v), \\ n_v &= -(\omega_2^1 r_u + \omega_2^2 r_v), \end{aligned} \quad (4)$$

而

$$2H = \omega_1^1 + \omega_2^2, \quad K = \omega_1^1 \omega_2^2 - \omega_1^2 \omega_2^1. \quad (5)$$

因而,

$$\begin{aligned} n_u \times r_v &= -\omega_1^1 r_u \times r_v, \\ r_u \times n_v &= -\omega_2^2 r_u \times r_v. \end{aligned} \quad (6)$$

从(5)和(6), 有

$$n_u \times r_v + r_u \times n_v = -2H r_u \times r_v. \quad (7)$$

从(4)和(5), 有

$$n_u \times n_v = K r_u \times r_v. \quad (8)$$

将(7)和(8)代入(3), 有

$$r_u^* \times r_v^* = (1 - 2\lambda H + \lambda^2 K) r_u \times r_v. \quad (9)$$

由于(2), 曲面 S_λ 的单位法向量就是 n , 对于曲面 S_λ , 应当有

$$n_u \times n_v = K_\lambda r_u^* \times r_v^*. \quad (10)$$

这里 K_λ 是曲面 S_λ 的 Gauss 曲率. 把(9)和(10)代入(8), 有

$$K_\lambda = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}. \quad (11)$$

对于曲面 S_λ , 类似(7)的证明, 有

$$r_u^* \times n_v + n_u \times r_v^* = -2H_\lambda r_u^* \times r_v^*. \quad (12)$$

这里 H_λ 是曲面 S_λ 的平均曲率.

将(3)中前两式代入(12), 并且利用(7)、(8)和(9), 有

$$H_\lambda = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}. \quad (13)$$

有了(11)和(13)两个公式, 我们可以证明本例的几个小命题

了.

(i) 当 S 是全脐点曲面时, $H^2 = K$. 当 $K = 0$ 时, $H = 0$. 从

(11)和(13), 有 $K_\lambda = 0$, $H_\lambda = 0$. 曲面 S_λ 是全脐点. 当 $K \neq 0$ 时,

$$\frac{H^2}{K} = 1.$$

从(11)和(13), 有 $K_\lambda \neq 0$, 和

$$\frac{H_\lambda^2}{K_\lambda} = \frac{(H - \lambda K)^2}{K(1 - 2\lambda H + \lambda^2 K)} = 1, \quad (14)$$

曲面 S_λ 仍是全脐点曲面.

如果曲面 S_λ 是全脐点曲面, 当 $K_\lambda = 0$ 时, $H_\lambda = 0$, 从(11)有 $K = 0$, 从(13)有 $H = 0$, 曲面 S 全脐点; 当 $K_\lambda \neq 0$ 时,

$$\frac{H_\lambda^2}{K_\lambda} = 1,$$

从(11)和(13), 有

$$\frac{(H - \lambda K)^2}{K(1 - 2\lambda H + \lambda^2 K)} = 1, \quad (15)$$

从上式, 有 $H^2 = K$, 曲面 S 还是全脐点的.

(ii) 从(11)可知 $K = 0$ 的充要条件是 $K_\lambda = 0$.

(iii) 从(13)可知 $H_\lambda = 0$ 的充要条件是 $H = \lambda K$.

(iv) S 是无平点的极小曲面, $H = 0$, 从(11)和(13), 有

$$K_\lambda = \frac{K}{1 + \lambda^2 K}, \quad H_\lambda = \frac{-\lambda K}{1 + \lambda^2 K}. \quad (16)$$

极小曲面无平点, $K \neq 0$, 那么 $K_\lambda \neq 0$, 从而 k_1^* , k_2^* 都不为零, 利用(16), 有

$$\frac{1}{k_1^*} + \frac{1}{k_2^*} = \frac{k_1^* + k_2^*}{k_1^* k_2^*} = \frac{2H_\lambda}{K_\lambda} = -2\lambda. \quad (17)$$

反之, 如果曲面 S_λ 的两个主曲率满足关系式(17), 那么 $K_\lambda \neq 0$, 和 $H_\lambda + \lambda K_\lambda = 0$, 从(11)和(13), 有 $K \neq 0$ 和 $H = 0$. 曲面 S 是无平点的极小曲面.

(v) 当 $K_\lambda = \frac{1}{\lambda^2}$ 时, 从(11), 有

$$\lambda^2 K = 1 - 2\lambda H + \lambda^2 K, \quad (18)$$

即

$$H = \frac{1}{2\lambda}, \quad (19)$$

曲面 S 的平均曲率是常数.

(vi) 曲面 S 无脐点, 从(1)的证明可以知道, 曲面 S_λ 也无脐点. 选择曲面 S 的曲率线网为参数曲线网, 由 Rodrigues 公式, (20)

$$\mathbf{n}_u = -k_1 \mathbf{r}_u, \quad \mathbf{n}_v = -k_2 \mathbf{r}_v,$$

这里 k_1, k_2 是曲面 S 的两个主曲率.

利用(3)的前两式, 有

$$\mathbf{r}_u^* = (1 - \lambda k_1) \mathbf{r}_u, \quad \mathbf{r}_v^* = (1 - \lambda k_2) \mathbf{r}_v. \quad (21)$$

由于曲面 S_λ 的单位法向量仍是 $\mathbf{n}$, 利用(20)和(21), 有

$$\mathbf{n}_u = \frac{-k_1}{1 - \lambda k_1} \mathbf{r}_u^*, \quad \mathbf{n}_v = \frac{-k_2}{1 - \lambda k_2} \mathbf{r}_v^*. \quad (22)$$

利用 Rodrigues 公式, u, v 参数曲线也是曲面 S_λ 的曲率线.

由于

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}^*(u, v) - \lambda \mathbf{n}(u, v). \quad (23)$$

这里 $\mathbf{n}(u, v)$ 理解为曲面 S_λ 的单位法向量. 那么, 曲面 S 也可看作曲面 S_λ 的平行曲面. 所以, 从已经证明的结论可以知道: 选择曲面 S_λ 的曲率线网为 u, v 参数曲线网, u, v 参数曲线网也是曲面 S 的曲率线网.

因而无脐点曲面 S 上曲率线与平行曲面 S_λ 上曲率线互相正交.

应.

证毕.

曲面 S 的 Gauss 曲率 K 和平均曲率 H 如果满足一个确定的函数关系

$$F(K, H) = 0,$$

则曲面 S 称为一个 Weingarten 曲面. 由于

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad K = k_1 k_2,$$

这里 k_1, k_2 是两个主曲率. 那么

$$0 = F\left(k_1 k_2, \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\right) = F^*(k_1, k_2).$$

显然在定义域范围内, $\frac{\partial F^*}{\partial k_1}, \frac{\partial F^*}{\partial k_2}$ 不可能全为零, 否则 F^* 与 k_1, k_2 无关, 那么 F 与 K, H 无关, 这不是 Weingarten 曲面.

不妨设在某点 $\frac{\partial F^*}{\partial k_1} \neq 0$, 那么在含这点的邻域内,

$$k_1 = f(k_2),$$

因此, 在局部范围内, Weingarten 曲面由 $k_2 = f(k_2)$ 确定.

下面的例题给出 Weingarten 曲面的局部存在性.

例 67 给定 $(0, \infty)$ 上任意一个 C^1 函数 $k_1 = f(k_2)$, 则在局部一定存在一个曲面 S , 使得曲面 S 的两个主曲率恰为满足 $k_1 = f(k_2)$ 的 k_1 和 k_2 .

证明 由于全脐点曲面(平面或球面)始终存在, 下面不考虑 $f(k_2) = k_2$ 这种情况.

我们引入 R^3 内由 yz 平面上曲线 $y = g(z)$ 绕 z 轴旋转而成的曲面 M , 它的向量形式

$$\mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos v, g(u) \sin v, u), \quad (1)$$

这里 $g(u)$ 是 u 的待定正函数.

容易知道曲面 S 的第一、二基本形式分别是

$$I = \left[1 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2\right] du^2 + g^2 dv^2,$$

$$II = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2}} \left[-\frac{d^2 g}{du^2} du^2 + g dv^2 \right]. \quad (2)$$

如果 M 的主曲率一个是 t , 另一个是 $f(t)$, 那么有下述常微

$$\begin{cases} -\frac{d^2g}{du^2} = f(t) \left[1 + \left(\frac{dg}{du} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \\ tg \sqrt{1 + \left(\frac{dg}{du} \right)^2} = 1. \end{cases} \quad (3)$$

我们用 t 作自变量, 求 (3) 的一组解. (3) 的第二式两边平方, 可得

$$\frac{dg}{du} = \frac{\sqrt{1-t^2g^2}}{tg}. \quad (4)$$

上式对 u 求导, 利用 (4), 有

$$\frac{d^2g}{du^2} = -\frac{1}{t^2g^3} - \frac{\frac{dt}{du}}{tg} \frac{g^2\sqrt{1-t^2g^2}}{t^2g^2}. \quad (5)$$

利用 (3) 的第一式和第二式, 有

$$\frac{d^2g}{du^2} = -\frac{f(t)}{t^3g^3}. \quad (6)$$

将 (6) 代入 (5), 并且利用 (4), 有

$$\begin{aligned} f(t) - t &= \frac{tg^2}{\sqrt{1-t^2g^2}} \frac{dt}{du} \\ &= \frac{\frac{dt}{du}}{\frac{dg}{du}} = g \frac{dt}{dg}. \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 分离变量, 有

$$\frac{dg}{g} = \frac{dt}{f(t) - t}. \quad (8)$$

积分 (8); 有

$$g(u(t)) = c_1 e^{\int_0^u \frac{ds}{f(s)-s}}, \quad (9)$$

这里 c_1, t_0 是两个正常数. 利用 (4), 有

$$\frac{du}{dt} = \frac{tg}{\sqrt{1-t^2g^2}}. \quad (10)$$

利用 (9), 积分 (10), 有

$$u(t) = \int_{t_0}^t \frac{sg^2(u(s))}{\sqrt{1-s^2g^2(u(s))}} \frac{1}{f(s)-s} ds. \quad (11)$$

由于 f 不是 $(0, \infty)$ 上恒等函数, 则必有一个正常数 t_0 存在, $t_0 \neq 1$, $f(t_0) \neq t_0$, t_0 确定, 再确定常数 c_1 , 使得 (11) 有意义. 由 (11) 可得 $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_0} \neq 0$, 因此存在正常数 δ , 在 $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ 内 t 是 u 的 C^2 函数, 所以 yz 平面上曲线 $(g(u(t)), u(t))$ 在一个局部邻域内可写成 $y = g(z)$, 这一段局部曲线绕 z 轴旋转所得曲面的第一、二基本形式恰为 (2), 因而 M 的两个主曲率恰为 t 与 $f(t)$. 证毕.

注 例如要举 Gauss 曲率 K 和平均曲率 H 成比例关系 $K = cH$ 的旋转曲面, 这里 c 是负常数. 我们对球面不感兴趣, 希望找到新例子. 现在

$$k_1 = f(t_0) = \frac{ck_2}{2k_2 - c}.$$

由 (9) 和 (11), 取 $c_1 = 1$, 可得一组解. 在具体计算中, 可用不定积分去做. 我们通过计算可以得到

$$\begin{cases} g = \frac{1}{\sqrt{t(t-c)}}, \\ u = \frac{1}{\sqrt{-c(t-c)}} + \frac{1}{2c} \ln \frac{\sqrt{t-c} - \sqrt{-c}}{\sqrt{t-c} + \sqrt{-c}}. \end{cases}$$

令 $t = -c \operatorname{tg}^2 \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 则上面的参数曲线方程可化为

$$\begin{cases} u = \frac{1}{c} \left[\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi - \cos \varphi \right], \\ g = -\frac{\cos^2 \varphi}{c \sin \varphi}. \end{cases}$$

可以直接验证, 对于由上式确定的 yz 平面内曲线 (g, u) 绕 z 轴旋转所得曲面 M , 其 Gauss 曲率 K 和平均曲率 H 成比例关系

$K=cH$, 由于法向量的选择不同, cH 前可能有一负号.

§9 曲面上的 Laplace 算子

S 是一张曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \quad (1)$$

记 $u^1=u, u^2=v$, 利用曲面的 Gauss 公式, 有

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} + \Omega_{ij} \mathbf{n}, \quad (2)$$

这里 $\mathbf{n}$ 是曲面 S 的单位法向量; $\Omega_{11}=L, \Omega_{12}=\Omega_{21}=M, \Omega_{22}=N$ 是曲面 S 的第二基本形式系数; Γ_{ij}^k 是曲面 S 的联络系数. 记 $g_{11}=E, g_{12}=g_{21}=F, g_{22}=G$ 是曲面 S 的第一基本形式系数.

引入算子

$$\Delta_S = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right), \quad (3)$$

这里

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}, \quad (4)$$

是矩阵 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. Δ_S 称为曲面 S 的 Laplace 算子.

从 (3) 和 (2), 有

$$\Delta_S \mathbf{r} = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \Omega_{ij} \mathbf{n}. \quad (5)$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \Omega_{ij} &= g^{11} \Omega_{11} + 2g^{12} \Omega_{12} + g^{22} \Omega_{22} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} (GL - 2FM + EN) = 2H. \end{aligned} \quad (6)$$

将 (6) 代入 (5), 有

$$\Delta_S \mathbf{r} = 2H \mathbf{n}. \quad (7)$$

下面在曲面 S 的等温参数下, 写出上述曲面 S 的 Laplace 算子的具体表达式.

例 68 当曲面 S 的第一基本形式 $I = E(u, v)(du^2 + dv^2)$ 时, 曲面 S 的 Laplace 算子

$$\Delta_S = \frac{1}{E(u, v)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right).$$

证明 由于 u, v 是曲面 S 的等温参数, 则曲面 S 的联络系数

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{E_u}{2E},$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{E_v}{2E}. \quad (8)$$

那么,

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 = 0. \quad (9)$$

而

$$g^{11} = g^{22} = \frac{1}{E}, \quad g^{12} = g^{21} = 0. \quad (10)$$

曲面 S 的 Laplace 算子

$$\begin{aligned} \Delta_S &= \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \\ &= g^{11} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + g^{22} \frac{\partial^2}{\partial v^2} - g^{11} \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &\quad - g^{22} \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - \frac{1}{E} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2) \frac{\partial}{\partial u} \\ &\quad - \frac{1}{E} (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^1) \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

证毕.

由 (3) 定义的曲面 S 上的 Laplace 算子是曲面 S 上一个很重要的椭圆型算子.

例 69 求证: 曲面 S 上的 Laplace 算子 Δ_S 与参数选择无关.

证明 设 $w^1 = w^{*1}(u^1, w^2)$, $w^{*2} = w^{*2}(u^1, w^2)$ 是曲面 S 的一个参数变换, 由 w^{*1}, w^{*2} 作参数的曲面 S 的第一基本形式系数

$$g_{ij}^* = \sum_{k,l=1}^2 g_{kl} \frac{\partial w^k}{\partial w^{*i}} \frac{\partial w^l}{\partial w^{*j}}. \quad (12)$$

上式两端乘以 $\frac{\partial w^{*j}}{\partial w^s}$ 并且关于 j 从 1 到 2 求和, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 g_{ij}^* \frac{\partial w^{*j}}{\partial w^s} &= \sum_{k,l=1}^2 g_{kl} \frac{\partial w^k}{\partial w^{*i}} \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial w^l}{\partial w^{*j}} \frac{\partial w^{*j}}{\partial w^s} \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^2 g_{kl} \frac{\partial w^k}{\partial w^{*i}} \delta_{ls} = \sum_{k=1}^2 g_{ks} \frac{\partial w^k}{\partial w^{*i}}. \end{aligned} \quad (13)$$

我们知道, 矩阵 (g_{kl}) 确定, 则逆矩阵 (g^{kl}) 唯一确定. 矩阵 (g_{kl}^*) 确定, 则逆矩阵 (g^{*ij}) 也唯一确定. 利用 (13), 我们可以看到

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^2 \left(\sum_{s,i=1}^2 g^{*st} \frac{\partial w^i}{\partial w^{*s}} \frac{\partial w^k}{\partial w^{*t}} \right) g_{ki} \\ &= \sum_{s,i=1}^2 \left(g^{*st} \frac{\partial w^i}{\partial w^{*s}} \sum_{k=1}^2 g_{ki} \frac{\partial w^k}{\partial w^{*t}} \right) \\ &= \sum_{s,i=1}^2 \left(g^{*st} \frac{\partial w^i}{\partial w^{*s}} \sum_{j=1}^2 g_{ij}^* \frac{\partial w^{*j}}{\partial w^t} \right) \\ &= \sum_{j,s=1}^2 \left(\frac{\partial w^i}{\partial w^{*s}} \frac{\partial w^{*j}}{\partial w^t} \right) \left(\sum_{i=1}^2 g^{*st} g_{ij}^* \right) \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial w^i}{\partial w^{*j}} \frac{\partial w^{*j}}{\partial w^t} = \frac{\partial w^i}{\partial w^t} = \delta_{it}. \end{aligned} \quad (14)$$

所以, 我们有

$$\sum_{s,i=1}^2 g^{*st} \frac{\partial w^i}{\partial w^{*s}} \frac{\partial w^k}{\partial w^{*t}} = g^{ik}. \quad (15)$$

显然,

$$\frac{\partial}{\partial w^{*i}} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial w^k}{\partial w^{*i}} \frac{\partial}{\partial w^k}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w^{*i} \partial w^{*j}} = \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial w^k}{\partial w^{*i}} \frac{\partial w^l}{\partial w^{*j}} \frac{\partial^2}{\partial w^k \partial w^l} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 w^k}{\partial w^{*i} \partial w^{*j}} \frac{\partial}{\partial w^k}. \quad (17)$$

利用 (17), 我们有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial w^{*i} \partial w^{*j}} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^{*k} \frac{\partial}{\partial w^{*k}} \\ &= \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial w^k}{\partial w^{*i}} \frac{\partial w^l}{\partial w^{*j}} \frac{\partial^2}{\partial w^k \partial w^l} \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 w^k}{\partial w^{*i} \partial w^{*j}} \frac{\partial}{\partial w^k} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^{*k} \frac{\partial}{\partial w^{*k}}. \end{aligned} \quad (18)$$

而

$$\Gamma_{ij}^{*k} = \sum_{l=1}^2 g^{*kl} \Gamma_{ij}^{*l}, \quad (19)$$

这里

$$\Gamma_{ij}^{*k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}^*}{\partial w^{*k}} + \frac{\partial g_{kj}^*}{\partial w^{*i}} - \frac{\partial g_{ki}^*}{\partial w^{*j}} \right). \quad (20)$$

由于

$$g_{ij}^* = \sum_{s,l=1}^2 g_{sl} \frac{\partial w^s}{\partial w^{*i}} \frac{\partial w^l}{\partial w^{*j}}, \quad (21)$$

上式两端对 w^{*l} 求导, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}^*}{\partial w^{*l}} &= \sum_{k,s,l=1}^2 \frac{\partial g_{st}}{\partial w^{*l}} \frac{\partial w^k}{\partial w^{*i}} \frac{\partial w^s}{\partial w^{*j}} \\ &\quad + \sum_{s,l=1}^2 g_{st} \frac{\partial^2 w^s}{\partial w^{*i} \partial w^{*l}} \frac{\partial w^t}{\partial w^{*j}} \\ &\quad + \sum_{s,l=1}^2 g_{st} \frac{\partial w^s}{\partial w^{*i}} \frac{\partial^2 w^t}{\partial w^{*j} \partial w^{*l}}. \end{aligned} \quad (22)$$

在上式中, 交换上标 l, j , 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}^*}{\partial w^{*l}} &= \sum_{k,s,l=1}^2 \frac{\partial g_{st}}{\partial w^{*l}} \frac{\partial w^k}{\partial w^{*i}} \frac{\partial w^s}{\partial w^{*j}} \frac{\partial w^t}{\partial w^{*l}} \\ &\quad + \sum_{s,l=1}^2 g_{st} \frac{\partial^2 w^s}{\partial w^{*i} \partial w^{*j}} \frac{\partial w^t}{\partial w^{*l}} + \sum_{s,l=1}^2 g_{st} \frac{\partial w^s}{\partial w^{*i}} \frac{\partial^2 w^t}{\partial w^{*j} \partial w^{*l}}. \end{aligned} \quad (23)$$

再在上式中, 交换上标 i, j , 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ji}^*}{\partial w^{*l}} &= \sum_{k,s,l=1}^2 \frac{\partial g_{st}}{\partial w^{*l}} \frac{\partial w^k}{\partial w^{*i}} \frac{\partial w^s}{\partial w^{*j}} \frac{\partial w^t}{\partial w^{*l}} \\ &\quad + \sum_{s,l=1}^2 g_{st} \frac{\partial^2 w^s}{\partial w^{*i} \partial w^{*j}} \frac{\partial w^t}{\partial w^{*l}} + \sum_{s,l=1}^2 g_{st} \frac{\partial w^s}{\partial w^{*i}} \frac{\partial^2 w^t}{\partial w^{*j} \partial w^{*l}}. \end{aligned} \quad (24)$$

将(22), (23)和(24)代入(20), 有

$$\begin{aligned} I_{ij}^{*q} = & \frac{1}{2} \left(\sum_{k,s,t=1}^2 \frac{\partial g_{st}}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial u^{*i}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{*j}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} \right. \\ & + \sum_{k,s,t=1}^2 \frac{\partial g_{st}}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial u^{*i}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{*j}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} \\ & - \sum_{k,s,t=1}^2 \frac{\partial g_{st}}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial u^{*i}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{*j}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} \\ & \left. + \sum_{s,t=1}^2 g_{st} \frac{\partial^2 u^s}{\partial u^{*i} \partial u^{*j}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

上式右端第二项上下标 k 与 s 互换, 第三项上下标 t, k 互换, 有

$$\begin{aligned} I_{ij}^{*q} = & \frac{1}{2} \sum_{k,s,t=1}^2 \left(\frac{\partial g_{st}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial u^s} - \frac{\partial g_{sk}}{\partial u^t} \right) \\ & \cdot \frac{\partial u^k}{\partial u^{*i}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{*j}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} + \sum_{s,t=1}^2 g_{st} \frac{\partial^2 u^s}{\partial u^{*i} \partial u^{*j}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} \\ & = \sum_{k,s,t=1}^2 I_{skt} \frac{\partial u^k}{\partial u^{*i}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{*j}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} + \sum_{s,t=1}^2 g_{st} \frac{\partial^2 u^s}{\partial u^{*i} \partial u^{*j}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}}. \end{aligned} \quad (26)$$

将(26)代入(19), 有

$$\begin{aligned} I_{ij}^{*q} = & \sum_{k,s,t=1}^2 g^{*oi} \Gamma_{skt} \frac{\partial u^k}{\partial u^{*j}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{*i}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} \\ & + \sum_{s,t=1}^2 g^{*oi} g_{st} \frac{\partial^2 u^s}{\partial u^{*i} \partial u^{*j}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}}. \end{aligned} \quad (27)$$

(15) 两端乘以 $\frac{\partial u^{*o}}{\partial u^k}$, 并且关于 k 求和, 有

$$\sum_{s,t=1}^2 g^{*so} \frac{\partial u^s}{\partial u^{*i}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*j}} = \sum_{k=1}^2 g^{*ok} \frac{\partial u^k}{\partial u^{*i}}. \quad (28)$$

将(28)代入(27), 有

$$\begin{aligned} I_{ij}^{*o} = & \sum_{k,s,t=1}^2 \Gamma_{skt} \frac{\partial u^k}{\partial u^{*j}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{*i}} g^{*oi} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} \\ & + \sum_{s,t=1}^2 g_{st} \frac{\partial^2 u^s}{\partial u^{*i} \partial u^{*j}} g^{*oi} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} \\ & = \sum_{k,s,t=1}^2 \Gamma_{skt} \frac{\partial u^k}{\partial u^{*j}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{*i}} \frac{\partial u^t}{\partial u^{*q}} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{*i} \partial u^{*j}} \frac{\partial u^{*o}}{\partial u^i}. \end{aligned} \quad (29)$$

将(29)代入(18), 有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial u^{*i} \partial u^{*j}} - \sum_{i=1}^2 \Gamma_{ij}^{*o} \frac{\partial}{\partial u^{*o}} \\ & = \sum_{k,i=1}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^i} - \sum_{s=1}^2 \Gamma_{ki}^s \frac{\partial}{\partial u^s} \right) \frac{\partial u^k}{\partial u^{*i}} \frac{\partial u^i}{\partial u^{*j}}. \end{aligned} \quad (30)$$

(15) 两端乘以 $\frac{\partial u^{*j}}{\partial u^k}$ 并且关于 i, k 求和, 有

$$\sum_{i,k=1}^2 g^{ik} \frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i} \frac{\partial u^{*i}}{\partial u^k} = g^{*ji}. \quad (31)$$

(30) 两端乘以 g^{*ij} , 并且关于 i, j 求和, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 g^{*ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{*i} \partial u^{*j}} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^{*k} \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \\ & = \sum_{k,i=1}^2 g^{ik} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^i} - \sum_{s=1}^2 \Gamma_{ki}^s \frac{\partial}{\partial u^s} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

这(32)式说明曲面 S 上的 Laplace 算子 Δ_S 的确与参数的选择无关. 证毕.

注 从这例, 在曲面 S 的任意一点 P , 选择法坐标系, 那么, 在 P 点, $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$, $g^{ij}(P) = \delta_{ij}$, $\Gamma_{ij}^k(P) = 0 (1 \leq i, j, k \leq 2)$. 于是, 对于曲面 S 上 O^3 函数 f ,

$$(\Delta_S f)(P) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(P). \quad (33)$$

这表明在 P 点, Δ_S 与平面上 Laplace 算子是一样的. 下面一例给出曲面上 Laplace 算子的另一表示法.

例 70 曲面 S 上的 Laplace 算子

$$\Delta_S = \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} \right),$$

这里 $g = EG - F^2$.

证明
$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{2\sqrt{g}} g^{kl} \sum_{k,l=1}^2 g^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^i} \left(g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 g^{ij} g^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}. \quad (34)
\end{aligned}$$

由联络系数定义,例如参考(20),我们有

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} = \Gamma_{kl}^i + \Gamma_{lk}^i. \quad (35)$$

又由于

$$\sum_{s=1}^2 g_{ls} g^{sl} = \delta_{li}, \quad (36)$$

(36)两端对 u_k 求导,有

$$\sum_{s=1}^2 \frac{\partial g_{ls}}{\partial u^k} g^{sl} + \sum_{s=1}^2 g_{ls} \frac{\partial g^{sl}}{\partial u^k} = 0. \quad (37)$$

(37)两端乘以 g^{ki} , 并且关于 l 求和,有

$$\frac{\partial g^{ki}}{\partial u^k} = - \sum_{l,s=1}^2 g^{sl} g^{ki} \frac{\partial g_{ls}}{\partial u^k}. \quad (38)$$

在(38)中,令 $t=k=i$,有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g^{ii}}{\partial u^i} &= - \sum_{s,l=1}^2 g^{sl} g^{ii} \frac{\partial g_{ls}}{\partial u^i} \\
&= - \sum_{s,l=1}^2 g^{sl} g^{ii} (\Gamma_{ls}^i + \Gamma_{sl}^i) \\
&= - \sum_{l=1}^2 g^{ii} \Gamma_{il}^i - \sum_{s=1}^2 g^{sl} \Gamma_{is}^i. \quad (39)
\end{aligned}$$

将(35)、(39)代入(34),有

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 g^{ij} g^{kl} (\Gamma_{kl}^i + \Gamma_{lk}^i) \frac{\partial}{\partial u^j} \\
&\quad - \sum_{i,j,l=1}^2 g^{ij} \Gamma_{il}^i \frac{\partial}{\partial u^j} - \sum_{i,j,s=1}^2 g^{sj} \Gamma_{is}^i \frac{\partial}{\partial u^j} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 g^{ij} \Gamma_{kl}^k \frac{\partial}{\partial u^j} + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^2 g^{ij} \Gamma_{il}^i \frac{\partial}{\partial u^j} \\
&\quad - \sum_{i,j,l=1}^2 g^{ij} \Gamma_{il}^i \frac{\partial}{\partial u^j} - \sum_{i,j,s=1}^2 g^{sj} \Gamma_{is}^i \frac{\partial}{\partial u^j} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} \\
&= \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ik}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \\
&= \Delta g. \quad (40)
\end{aligned}$$

证毕.

注 以上内容尽管是对2维曲面进行讨论的,但它对一般的 n 维 Riemann 流形仍然适用.

§ 10 等距对应与保角对应

本节举等距对应与保角对应的一些例题.

例 71 曲面 S 的 Gauss 曲率是 K , 第一基本形式为 I , 曲面 S^* 的第一基本形式 $I^* = e^{2f} I$, 这里 f 是曲面 S 上的可微函数, 求曲面 S^* 的 Gauss 曲率.

解 在曲面 S 上取等温参数 u, v , 那么

$$I = E(u, v) (du^2 + dv^2). \quad (1)$$

由曲面 S 的 Gauss 方程, 曲面 S 的 Gauss 曲率

$$K = -\frac{1}{E} \left[\left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E}} \right)_u + \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E}} \right)_v \right]$$

我们知道,曲面上椭圆点、双曲线点和抛物点的分类在等距对应下是不变的.而球面上的点均是椭圆点,所以这曲面 S 与球面之间不可能存在等距对应.证毕.

例 73 已知曲面 S 与曲面 S^* 等距,若 S 上的两族渐近曲线在此对应下恰映成 S^* 上的渐近曲线,求证:曲面 S 与曲面 S^* 经 E^3 中运动或重合,或关于某平面对称.

证明 在曲面 S 上取渐近曲线网为参数曲线网,然后在曲面 S^* 上作参数变换,使得曲面 S^* 与曲面 S 在对应点有相同的参数 (u, v) ,由于曲面 S 和曲面 S^* 是等距的,所以 $E=E^*, F=F^*, G=G^*$,由于渐近曲线对应渐近曲线,而且都是参数曲线,那么曲面 S 和曲面 S^* 的第二基本形式系数中

$$L=0, N=0; \quad L^*=0, N^*=0. \quad (1)$$

在等距对应下,曲面的 Gauss 曲率对应不变,则

$$\frac{-M^2}{EG-F^2} = \frac{-M^{*2}}{E^*G^*-F^{*2}}, \quad (2)$$

这导致

$$M^* = \pm M. \quad (3)$$

如果 $M=M^*$,这时曲面 S 与曲面 S^* 具相同的第二、三基本形式,由曲面论基本定理, S 与 S^* 可经 E^3 中运动重合.

如果 $M=-M^*$,将曲面 S^* 关于 xy 平面对称,得新曲面 $\bar{S}$,对于曲面 $\bar{S}$,容易明白,在同一参数 (u, v) 表示下,

$$\bar{E}=E^*, \quad \bar{F}=F^*, \quad \bar{G}=G^*;$$

$$\bar{L}=-L^*, \quad \bar{M}=-M^*, \quad \bar{N}=-N^*. \quad (4)$$

于是曲面 S 与曲面 $\bar{S}$ 具有相同第一、二基本形式,由曲面论基本定理,曲面 S 与曲面 $\bar{S}$ 经 E^3 中运动能重合,于是曲面 S 与曲面 S^* 可经 E^3 中运动关于 xy 平面对称.证毕.

例 74 旋转面上与子午线交于定角的曲线称为斜驶线.求

$$= -\frac{1}{2E} \left[\left(\frac{E_u}{E} \right)_u + \left(\frac{E_v}{E} \right)_v \right] \quad (2)$$

$$= -\frac{1}{2E} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \ln E. \quad (3)$$

利用 § 9 例 68 的结论,有

$$K = -\frac{1}{2} \Delta_S \ln E. \quad (4)$$

这里 Δ_S 是曲面 S 的 Laplace 算子.

对于曲面 S^* ,

$$L^* = e^{2f(u,v)} E(u, v) (du^2 + dv^2). \quad (5)$$

类似(2),应当有

$$K^* = -\frac{1}{2e^{2f}E} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \ln(e^{2f}E)$$

$$= -\frac{1}{2e^{2f}E} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) (\ln E + 2f)$$

$$= \frac{1}{e^{2f}} (K - \Delta_S f). \quad (6)$$

这里 K^* 是曲面 S^* 的 Gauss 曲率.解毕.

注 如果 K^* 是给定函数,从(5),有

$$\Delta_S f + e^{2f} K^* - K = 0,$$

上述方程(关于未知函数 f)是半线性椭圆型方程.对于这个方程的大范围求解问题的研究是本世纪七十年代微分几何领域内一个引人注目的工作.

例 72 若曲面 S 上存在一条直线,求证:曲面 S 与球面之间不存在等距对应.

证明 曲面上直线必为渐近曲线,从而曲面在直线上的这些点就不是椭圆点,这是由于利用计算法曲率的 Euler 公式,沿这直线, $k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = 0$,必导致 $k_1 k_2 \leq 0$,这里 k_1, k_2 是曲面的主曲率.

证: 旋转面上由三条斜驶线所围成的三角形的三个内角之和为 σ .

证明 主要想法类似于球面到平面的 Mercator 投影法. 设旋转面

$$r(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, v), \quad f(v) > 0. \quad (1)$$

我们知道这旋转面的第一基本形式

$$I = f^2(v) du^2 + \left[1 + \left(\frac{df(v)}{dv}\right)^2\right] dv^2. \quad (2)$$

引入变换

$$\begin{cases} u = \bar{u} \\ v = h(\bar{v}), \end{cases} \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0, \quad (3)$$

则在新参数 $\bar{u}, \bar{v}$ 下, 这旋转面的第一基本形式

$$I = f^2(h(\bar{v})) d\bar{u}^2 + \left[1 + \left(\frac{df(h(\bar{v}))}{dh(\bar{v})}\right)^2\right] \left(\frac{dh(\bar{v})}{d\bar{v}}\right)^2 d\bar{v}^2. \quad (4)$$

我们要寻找函数 $h(\bar{v})$, 使得

$$f^2(h(\bar{v})) = \left[1 + \left(\frac{df(h(\bar{v}))}{dh(\bar{v})}\right)^2\right] \left(\frac{dh(\bar{v})}{d\bar{v}}\right)^2. \quad (5)$$

从(5), 有

$$\frac{d\bar{v}}{dh} = \pm \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{df(h)}{dh}\right)^2}}{f(h)}. \quad (6)$$

于是, 两端积分, 有

$$\bar{v} = \pm \int \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{df(h)}{dh}\right)^2}}{f(h)} dh. \quad (7)$$

取上述 $\bar{v}$, 反解出 $h = h(\bar{v})$, 以(3)为变换, 这时

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = \pm \frac{f(h)}{\sqrt{1 + \left(\frac{df(h)}{dh}\right)^2}} \neq 0. \quad (8)$$

这样一来, 旋转曲面的第一基本形式化为

$$I = f^2(h(\bar{v})) (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2). \quad (9)$$

利用此等温参数 $(\bar{u}, \bar{v})$, 把旋转面与平面作共形对应时, 子午线映成 $(\bar{u}, \bar{v})$ 平面上平行于 $\bar{v}$ 轴的直线, 斜驶线就映成与平行于 $\bar{v}$ 轴的一切直线都相交成定角的曲线, 这曲线必为直线, 而三条直线交成的一个三角形内角和自然是 π , 那么, 与它共形对应的三条斜驶线构成的一个三角形内角和也为 π . 证毕.

例 75 将旋转面共形对应于平面时, 经线的象为圆弧的充要条件是纬线的象也为圆弧.

证明 ① 设旋转曲面 S 的向量形式

$$r(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad f(v) > 0. \quad (1)$$

这里不妨假定 v 是平面曲线

$$\begin{cases} u = f(v) \\ v = g(v) \end{cases}$$

的弧长. 从而 S 的第一基本形式是

$$I = f^2(v) du^2 + dv^2 = f^2(v) \left(du^2 + \frac{1}{f^2(v)} dv^2 \right). \quad (2)$$

作变换

$$\begin{cases} \bar{u} = u \\ \bar{v} = \int \frac{1}{f(v)} dv, \end{cases} \quad \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \frac{1}{f(v)} \neq 0. \quad (3)$$

则在新参数 $(\bar{u}, \bar{v})$ 下,

$$I = f^{*2}(\bar{v}) (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2), \quad (4)$$

这里 $f^*(\bar{v}) = f(v)$. 此时, $\bar{u}$ 曲线, $\bar{v}$ 曲线仍旧分别为纬线, 经线

② 设题目中所论共形对应应在上述等温参数 $(\bar{u}, \bar{v})$ 下有表示 $\varphi: S \rightarrow E^2$, 即 $\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = (x(\bar{u}, \bar{v}), y(\bar{u}, \bar{v}))$. 在下面的计算中, 为简便, 仍旧用 u 代表 $\bar{u}$, v 代表 $\bar{v}$, f 代替 f^* . 那么, 我们有

$$\begin{aligned} f^2(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2) &= \rho^2(dx^2 + dy^2) \\ &= \rho^2[(x_u^2 + y_u^2)du^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v)du dv + (x_v^2 + y_v^2)dv^2]. \end{aligned} \quad (5)$$

由于 du, dv 的任意性, 有

$$x_u^2 + y_u^2 = x_v^2 + y_v^2 = \frac{f^2}{\rho^2}, \quad x_u x_v + y_u y_v = 0. \quad (6)$$

由(6)第三式, 有

$$\frac{x_u}{y_u} = -\frac{y_u}{x_v} = \lambda. \quad (7)$$

则

$$x_u^2 + y_u^2 = \lambda^2 (x_v^2 + y_v^2). \quad (8)$$

再利用(6)的前一个等式, 有

$$\lambda = \pm 1. \quad (9)$$

将(9)代入(7), 我们可以得到 $\varphi: (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$ 为共形的充要条件是

$$\begin{cases} x_u = y_v, & \text{或} \\ x_v = -y_u, \end{cases} \quad \begin{cases} x_u = -y_v, \\ x_v = y_u. \end{cases} \quad (10)$$

③ 设纬线 ($v = \text{常数}$) 与经线 ($u = \text{常数}$) 在 x, y 平面中的象曲线具有(相对曲率) k_1 与 k_2 , 则

$$k_1 = \frac{x_u y_{uu} - x_{uu} y_u}{(x_u^2 + y_u^2)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{x_v y_{vv} - x_{vv} y_v}{(x_v^2 + y_v^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

在 $x_u = y_v, x_v = -y_u$ 的条件下,

$$k_1 = \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{(x_u^2 + y_u^2)^{1/2}}, \quad k_2 = -\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{(x_v^2 + y_v^2)^{1/2}}. \quad (12)$$

此时, 纬线象为圆弧的充要条件是 $k_1 = k_1(v)$, 那么,

$$\frac{\partial k_2}{\partial v} = -\frac{\partial k_1}{\partial u} = 0,$$

这表明 $k_2 = k_2(u)$, 换句话说讲, 经线象是圆弧.

对于 $x_u = -y_v, x_v = y_u$ 情况, 也可完全类似证明. 证毕.

例 76 设曲面 S 的 Gauss 曲率 $K > 0$, 如果曲面 S^* 与曲面 S 等距. 求证:

(1) 在曲面 S 与曲面 S^* 上均可找到共轭曲线网, 使它们在此等距对应下互相对应.

(ii) 若 k_m, k_n 是曲面 S 上的这对共轭曲线的法曲率, 记 k_{m1}, k_{n1} 为曲面 S^* 中对应的共轭曲线的法曲率, 则

$$\left| \frac{k_{m1}^*}{k_m} + \frac{k_{n1}^*}{k_n} \right| \geq 2.$$

证明 (i) 在曲面 S 与曲面 S^* 上选取适当参数, 使等距对应的点有相同的参数 (u, v) . 为方便, 还可设 u, v 曲线构成曲面 S 上的一个共轭曲线网. 从而 $M = 0$.

若方向 $\frac{du}{dv}, \frac{du^*}{dv^*}$ 同时为曲面 S 与曲面 S^* 在对应点处的共轭方向, 则

$$L du du^* + N dv dv^* = 0, \quad (1)$$

$$L^* du du^* + M^* (du dv^* + dv du^*) + N^* dv dv^* = 0. \quad (2)$$

它们可改写为

$$\begin{cases} (L du + (N dv) dv^*) du^* = 0, \\ (L^* du + M^* dv) du^* + (M^* du + N^* dv) dv^* = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由于 du^*, dv^* 不可能同时为零, 则应当有

$$\begin{vmatrix} L du, & N dv \\ L^* du + M^* dv, & M^* du + N^* dv \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

即

$$LM^* du^2 + (LN^* - L^* N) du dv - M^* N dv^2 = 0. \quad (5)$$

同样, 由于满足(5)的不全为零实数 du, dv 存在, 那么(5)的判别式

$$(LN^* - L^* N)^2 + 4LN^* M^2 \geq 0. \quad (6)$$

反之, 如果(6)成立, 则满足(5)的不全为零的 du, dv 存在. 而且, 必可从(3)找出另一组不全为零的解 du^*, dv^* . 它们同时是曲面 S 与曲面 S^* 的共轭方向.

由于 $K > 0$, 则 $LN > 0$, 所以(6)的确成立. 即曲面 S 与曲面 S^* 上均可找到相互对应的共轭网.

注意, 到此为止, 等距的条件并未用过.

(ii) 由于曲面 S 与曲面 S^* 等距, 那么利用 $M = 0$, 有

$$LN = K(EG - F^2) = K(E^*G^* - F^{*2}) = L^*N^* - M^{*2}. \quad (7)$$

那么(6)的左边可改写为

$$\begin{aligned} & (LN^* - L^*N)^2 + 4LN M^{*2} \\ &= (LN^* + L^*N)^2 - 4LN L^*N^* + 4LN M^{*2} \\ &= (LN^* + L^*N)^2 - 4LN(L^*N^* - M^{*2}) \\ &= (LN^* + L^*N)^2 - 4L^2N^2 \\ &= \left[\left(\frac{N^*}{N} + \frac{L^*}{L} \right)^2 - 4 \right] L^2N^2. \end{aligned} \quad (8)$$

结合(6)和(8), 有

$$\left(\frac{N^*}{N} + \frac{L^*}{L} \right)^2 \geq 4. \quad (9)$$

现在 u, v 曲线同为曲面 S 和曲面 S^* 上的共轭曲线, 它们对应的法曲率

$$k_{nn} = \frac{L}{E}, \quad k_{nn} = \frac{N}{G}, \quad k_{nn}^* = \frac{L^*}{E^*}, \quad k_{nn}^* = \frac{N^*}{G^*}. \quad (10)$$

注意到 $E = E^*, G = G^*$, 那么

$$\left(\frac{k_{nn}^*}{k_{nn}} + \frac{k_{nn}^*}{k_{nn}} \right)^2 = \left(\frac{L^*}{L} + \frac{N^*}{N} \right)^2 \geq 4. \quad (11)$$

由此即得所要结果. 证毕.

§ 11 曲面上向量的平行移动

由 Levi-Civita 在 1917 年引入的曲面上一个切向量沿某曲线平行移动的概念, 是曲面内蕴几何学发展史上的又一里程碑, 从此我们熟知的欧氏空间中的平行概念及其有关的重要性质在曲面

上就有了推广. 我们希望以下介绍的一些例题能使读者对曲面上切向量平行移动的性质及其与欧氏空间中平行移动之间的联系有进一步的认识.

例 77 设曲线 O 是球面 S^2 上北纬度为 α 的一个纬圆, 它的正向由上半球面的外法向按右手法则决定. 试求 S^2 在 O 上的一个切向量沿 O 正向平行移动一周后所产生的角差.

解法 1 设球面 S^2 的半径为 R , 如图, 记 O 所围成的单连通域, 即球冠为 Σ . 根据切向量沿闭曲线 O 平行移动一周后所产生角差 $\Delta\omega$ 的计算公式, 我们有

$$\Delta\omega = \iint_{\Sigma} K d\sigma.$$

若取球坐标, 则

$$d\sigma = R^2 \cos \theta d\theta d\varphi,$$

并注意到球面 S^2 的总曲率

$$K = \frac{1}{R^2},$$

于是所求的角差为

$$\Delta\omega = \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \theta d\theta = 2\pi(1 - \sin \alpha).$$

解法 2 沿 O 作正圆锥面 Σ 与 S^2 相切, 则切向量沿 O 在 S^2 上作平行移动与在 Σ 上作平行移动是等价的. 又由于切向量平行移动一周以后产生的角差与所选的向量无关, 所以不妨取 Σ 的某一条固定母线 l 在与 O 相交点 A 处的方向 v_0 作为平行移动的起始向量.

把 Σ 沿 l 剪开展成平面, 则 v_0 沿 O 平移一周后的终止向量 v_1 就是在平面中把 v_0 按普通欧氏氏平行移动到终点 A' 处的向量. 151.

量. 于是所求的角差

$$\Delta\omega = \frac{2\pi OA - 2\pi r}{OA} = \frac{2\pi R \operatorname{ctg} \alpha - 2\pi R \cos \alpha}{R \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$= 2\pi(1 - \sin \alpha).$$

解毕.

注 在解本题时要当心的是虽然 v_0 在 S^2 上沿 O 平行移动与它在 Σ 上沿 O 平行移动等价, 但却不能在 Σ 相应的圆锥域 $\mathscr{D}_\Sigma$ 上应用解法 1 中的角差计算公式

$$\Delta\omega = \iint_{\mathscr{D}_\Sigma} K_\Sigma d\sigma_\Sigma,$$

这里的 K_Σ 是 Σ 的总曲率. 这是因为圆锥的顶点 O 不是 Σ 的正则点, 而丢掉了 O 点的 $\mathscr{D}_\Sigma$ 并非单连通, 于是应用此公式的条件是不满足的, 不然就会导致 $\Delta\omega = 0$ 的矛盾结果.

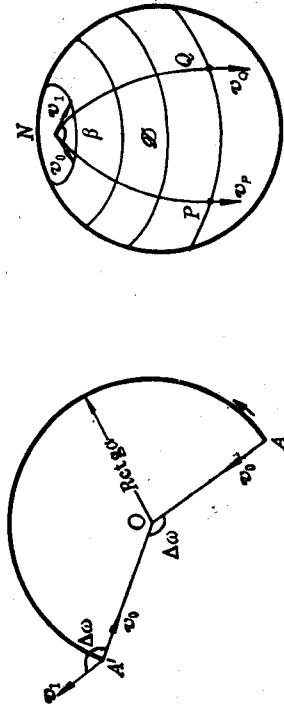


图 7

例 78 设 N 为球面 S^2 的极点, P, Q 是赤道上的两点, 大圆弧 $\widehat{NP}, \widehat{NQ}$ 在 N 点的夹角为 β . 考察 $\widehat{NP}$ 在 N 处的单位切向量 v_0 . 求 v_0 沿三条大圆弧 $\widehat{NP}, \widehat{PQ}, \widehat{QN}$ 平行移动一周后所得的角差.

解法 1 设 S^2 的半径为 R , 并记这三条大圆弧围成的单连通域为 $\mathscr{D}$ (见图 8), 则由角差的计算公式

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \iint_{\mathscr{D}} K d\sigma \\ &= \frac{1}{R^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\beta} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \theta d\theta = \beta, \end{aligned}$$

式中的 φ_0 是大圆弧 $\widehat{NP}$ 所对应的经度.

解法 2 由于 $\widehat{NP}$ 是测地线, 它的切向量沿 $\widehat{NP}$ 是平行移动的, 所以 v_0 沿 $\widehat{NP}$ 平移到 P 点时应成为 $\widehat{NP}$ 在 P 点的单位切向量 v_P . 因为 $\widehat{PQ}$ 也是测地线, v_P 沿 $\widehat{PQ}$ 平移时必须与 $\widehat{PQ}$ 的切向保持定角 $\frac{\pi}{2}$, 所以当 v_P 平移到 Q 点时恰为 $\widehat{NQ}$ 在点 Q 的切向量 v_Q . 但是 $\widehat{NQ}$ 仍然是测地线, 从而 v_Q 平移一周回到 N 点时就是 $\widehat{NQ}$ 在 N 处的切向量 v_1 , 这样一来所求角差自然是 β . 解毕.

注 如在本例中把 P, Q 所在的赤道改为纬度为 α 的纬圆, 其余条件不变, 则所求的角差应为

$$\Delta\omega = \iint_{\mathscr{D}} K d\sigma = \frac{1}{R^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\beta} d\varphi \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \theta d\theta = \beta(1 - \sin \alpha).$$

例 79 (i) 对任何空间正则曲线 $O: r = r(s)$, s 为弧长, 试确定沿 O 定义的向量场 $\Omega(s)$, 使得 Frenet 公式化为

$$T'(s) = \Omega(s) \times T(s), \quad N'(s) = \Omega(s) \times N(s),$$

$$B'(s) = \Omega(s) \times B(s).$$

满足这些条件的 $\Omega(s)$ 称为 Darboux 矢.

(ii) 若 O 是圆柱螺线, 证明: 在直纹面 $S: p(s, v) = r(s) + v\Omega(s)$ 上, 向量场 $\Omega(s)$ 沿 O 是平行移动的.

解 (i) 先设 $\Omega(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)$, 其中的 $a(s), b(s), c(s)$ 是待定函数, 然后把 $\Omega(s)$ 的这一表达式代入它所求满足的条件, 并利用 Frenet 公式写出 $T'(s), N'(s),$

$\vec{B}'(s)$ 的分解式,比较系数后我们即可定出

$$\Omega(s) = \tau(s)T(s) + k(s)B(s),$$

这里的 $k(s)$ 、 $\tau(s)$ 分别是曲线 C 的曲率、挠率.

证明(ii) 由于 C 现在是圆柱螺线,所以它的曲率和挠率均为常数. 在直纹面 S 上,我们有

$$\rho_s(s, v) = T(s) + v\Omega'(s),$$

$$\rho_v(s, v) = \Omega(s).$$

因此,沿曲线 C , 曲面 S 的法向量

$$\begin{aligned} n(s, 0) &\parallel \rho_s(s, 0) \times \rho_v(s, 0) \\ &= T(s) \times (\tau(s)T(s) + k(s)B(s)) \\ &= -k(s)N(s), \end{aligned}$$

也就是说, C 是 S 上的测地线, 所以 $T(s)$ 沿曲线 C 是平行移动的; 而且, $B(s)$ 也是 S 上沿 C 定义的单位切向量场, 由于它与 $T(s)$ 垂直, 所以 $B(s)$ 沿 C 也是平行移动的. 现在, Darboux 矢

$$\Omega(s) = \tau T(s) + k B(s)$$

便是两个平行向量场的常系数线性组合, 所以沿 C 仍旧是平行移动的. 证毕.

例 80 设 S 为总曲率 $K=0$ 的曲面, C_1 和 C_2 是 S 上连接 P, Q 两点的曲线, 并假定它们围成单连通域 $\mathcal{D}$. 试证明: S 在 P 点的任何一个切向量 v_0 分别沿 C_1 和 C_2 平行移动到 Q 点时是一致的.

证明 用反证法. 设 $v_0 \in T_P$ 分别沿 C_1 和 C_2 平行移动到 Q 点时所得的切向量为 v_1 和 v_2 , 它们的交角为 θ , $0 < \theta < 2\pi$. 因为由切向量

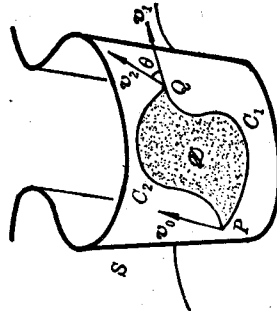


图 9

$$\begin{aligned} v(s) &= \sum_{i=1}^2 v^i(s) r_i(u^1(s), u^2(s)) \\ \text{沿曲线 } u^1 &= u^1(s), u^2 = u^2(s) \text{ 平行移动的条件} \\ \frac{dv^i(s)}{ds} &+ \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i(u^1(s), u^2(s)) v^j(s) \frac{du^k(s)}{ds} = 0 \end{aligned}$$

$$(i=1, 2),$$

可以知道, 曲线定向改变时, 方程形式不变, 所以根据常微分方程初值问题解的唯一性, v_0 沿 C_2 反方向平行移动到 P 时应该得到 v_0 . 又由于向量平行移动时保持内积, 所以 v_1 再沿 C_2 的反方向平移到 P 点时就不会再是 v_0 . 于是, 切向量 v_0 沿由 C_1 和 (反方向的) C_2 构成的闭环路平行移动一周后所得的角差

$$\Delta\omega = \theta.$$

但是, 按照角差的计算公式, 我们却有

$$\Delta\omega = \iint_{\mathcal{D}} K \, d\sigma = 0,$$

这个矛盾便说明在 S 上平行移动与路径是无关的. 证毕.

注 我们也可考虑下列反过来的问题:

如果曲面 S 上的切向量在任何两点间的平行移动与连接这两点的曲线无关, 这时候, S 的总曲率 K 必定为零.

其实我们可用反证法来说明这个事实. 若有 $P_0 \in S$, 使总曲率 $K(P_0) \neq 0$ 的话, 根据连续性, 必有 P_0 在 S 上的邻域 U , 使得 $K|_U \neq 0$. 在 U 中取充分小的闭环路 C , 使它围成 S 上的单连通域 $\mathcal{D}$, 且使

$$0 < \left| \iint_{\mathcal{D}} K \, d\sigma \right| < 2\pi.$$

另一方面, 类似于例 80 中的分析可以推知, 当向量的平行移动与路径无关时, 切向量沿闭环路平行移动一周后就应该回到原来的位置, 从而由角差的计算公式应该有

$|\Delta\omega| = \left| \left| \iint_{\sigma} K d\sigma \right| \right| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi, \dots$ 中的某值, 显然, 这与上面得到的不等式是矛盾的. 这个矛盾说明曲面 S 的总曲率只能是处处为零.

例 81 设 O 为球面上的简单正则闭曲线. 证明: 曲线 O 平分所在球面面积的充要条件是球面在 O 上的任何切向量沿 O 平行移动一周后回到原来位置.

证明 假定 O 围成的一个单连通域为 Ω , 则 O 上的任何一个切向量沿 O 平行移动一周后产生的角差是

$$\Delta\omega = \iint_{\Omega} K d\sigma = \frac{1}{R^2} A(\Omega),$$

式中的 R 是该球面的半径, $A(\Omega)$ 是 Ω 域的面积.

若切向量沿 O 平行移动一周后回到原来位置, 则角差 $\Delta\omega$ 必定是 $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 这些值之一, 但是由于球面的总面积为 $4\pi R^2$, 由此可得

$$0 < \frac{1}{R^2} A(\Omega) < 4\pi,$$

所以只能有 $\Delta\omega = 2\pi$, 也就是 $A(\Omega) = 2\pi R^2$, 恰好平分该球面面积.

反之, 如果曲线 O 平分所在球面的面积, 那么前述的角差计算公式就给出

$$\Delta\omega = \frac{1}{R^2} A(\Omega) = 2\pi,$$

也就是切向量沿 O 平行移动一周后必回到原来位置. 证毕.

在结束本节以前, 我们以球面为例再举一题, 形象地说明面上的切向量如何沿一条已知曲线作平行移动.

例 82 设 O 为球面上的一条曲线, P, Q 为 O 的起终点. 求球面上 P 点处的切向量 v_P 沿 O 平行移动到 Q 点时所得切向量 v_Q 的位置.

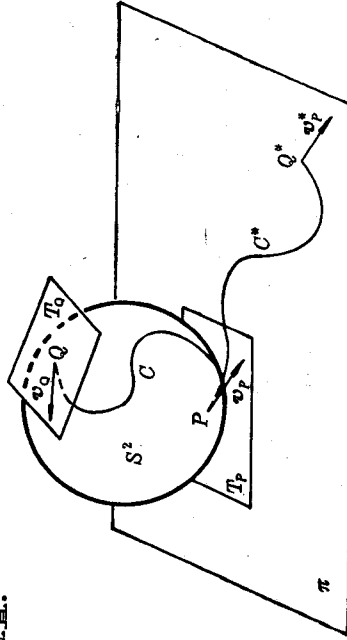


图 10

解 将球面放到平面 π 上, 使 T_P 与 π 重合, 从而得到 v_P 在 π 上的对应向量 (仍记为 v_P). 然后把该球面在 π 上作无滑动的滚动, 在滚动过程中始终使曲线 O 上的点成为球面与 π 的切点, 这些切点全体在 π 上便构成 O 的对应曲线 O^* . 这样最终可得 Q 点在平面 π 上的对应点 Q^* . 这时, v_P 在球面上沿 O 作平行移动与 v_P 在 π 上沿 O^* 的对应曲线 O^* 作平行移动是一致的, 但后者就是欧氏平面中的普通平移. 于是我们先作普通的平行移动在 π 上把 v_P 移到 Q^* 点得到 v_{P^*} , 随后把球面按 O 与 O^* 上的对应点重合的条件在 π 上作无滑动的滚动, 直至 Q 点成为球面与 π 的切点, 即 T_Q 与 π 重合为止. 这时, v_{P^*} 在 T_Q 中的对应向量 v_Q 就是要求的 v_P 在球面上沿 O 平行移动到 Q 点时所得的向量.

自然, 上述的球面滚动的过程, 就是不断地把该球面沿 O 的切平面的包络曲面展开成平面的过程, 而 π 就是此包络曲面最终展成的平面.

图 11

第四章 曲面的一些整体性质

§1 Gauss 映射

Gauss 映射是曲面微分几何学必讲的内容之一, 它不仅是局部微分几何的一个重要章节, 而且也是整体微分几何研究中的一个有力工具. 下面略举几例说明之.

如所知, 作为整体 Gauss-Bonnet 公式的推论, 总曲率 $K \geq 0$ (不恒为零) 的紧致连通定向曲面与球面是同胚的 (比如, 参见苏步青、胡和生教授等编的《微分几何》第三章 §2). 如果 $K > 0$, 则这个同胚映射就可由 Gauss 映射具体给出, 此即下面的

例 83 设 S 是 $\mathbb{E}^3$ 中的紧致连通定向曲面, 处处有 $K > 0$. 证明: S 的 Gauss 映射是整体微分同胚.

证明 (i) 先来说明 Gauss 映射 $N: S \rightarrow S^2$ 是局部微分同胚. $\forall P \in S$, 因为 S 是整体定义的曲面, 所以必有 P 点的坐标邻域 Σ

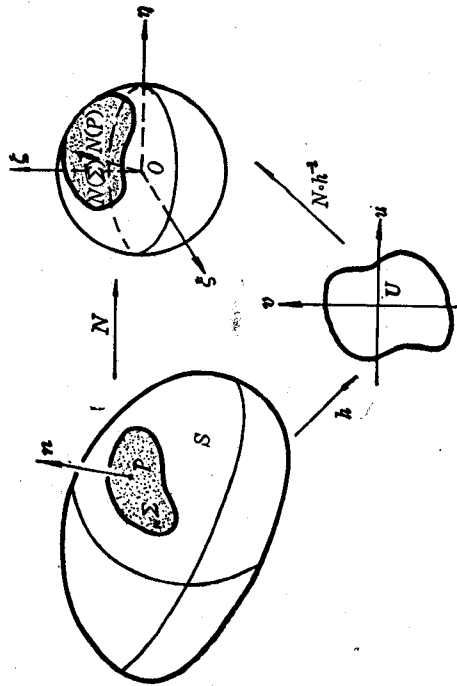


图 13

$\subset S$ 以及是微分同胚的坐标映射 $h: \Sigma \rightarrow U \subset \mathbb{E}^2$, 使得 Gauss 映射在 U 上的表示 $N \circ h^{-1}$ 为

$$(u, v) \mapsto (\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)) = \mathbf{n}(u, v).$$

这里的 $\mathbf{n}(u, v)$ 原是 Σ 这一部分曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 在 (u, v) 处的单位法向量, 然后平移到坐标系的原点.

因为 $\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, 且 $K > 0$, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$, 所以 $N \circ h^{-1}$ 的 Jacobian 矩阵的秩

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \xi_u & \eta_u & \zeta_u \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \end{pmatrix} = 2.$$

利用隐函数存在定理知道, $N \circ h^{-1}$ 在包含 $h(P)$ 的一个邻域 (可能要比 U 小) 上就存在光滑的逆映射, 因而是微分同胚. 于是在对应的 P 的一个邻域内, 两个微分同胚的复合映射 $N = (N \circ h^{-1}) \circ h$ 也是微分同胚. 由于 P 是任意取的, 所以在整个 S 上 N 是局部微分同胚.

(ii) $N: S \rightarrow S^2$ 是满映射. 由于我们已经证明 $N: S \rightarrow S^2$ 是局部同胚, 所以 N 是开映射, 即它把 S 中的开集映成 S^2 中的开集. 另外, 由于 S 紧致, S^2 为 Hausdorff 空间, 所以 N 也是闭映射. 这样一来, $N(S)$ 便是 S^2 中既开又闭的集, 它的非空性是明显的, 因此根据 S^2 的连通性我们推得 $N(S) = S^2$.

(iii) 最后我们来证明 $N: S \rightarrow S^2$ 是整体一一的. 用反证法, 假定有不同的两点 $P, Q \in S$, 使得 $N(P) = N(Q)$, 根据 (i) 知道, 分别存在 P, Q 在 S 中的邻域 Σ_P, Σ_Q , 使得 $N|_{\Sigma_P}: \Sigma_P \rightarrow N(\Sigma_P)$, $N|_{\Sigma_Q}: \Sigma_Q \rightarrow N(\Sigma_Q)$ 都是微分同胚. 由于 $P \neq Q$, 我们可把 Σ_P, Σ_Q 取得使 $\Sigma_P \cap \Sigma_Q = \emptyset$. 现在分别取 $N(\Sigma_P) \cap N(\Sigma_Q)$ 在 $N|_{\Sigma_P}$ 与 $N|_{\Sigma_Q}$ 下的逆象

$$\begin{aligned} U &= (N|_{\Sigma_P})^{-1}(N(\Sigma_P) \cap N(\Sigma_Q)), \\ V &= (N|_{\Sigma_Q})^{-1}(N(\Sigma_P) \cap N(\Sigma_Q)). \end{aligned}$$

于是 $U \cap V = \emptyset$, 而且 $N(U) = N(V)$, 所以由 (ii) 可得 $N(S \setminus U) = S^2$. 另一方面, 按整体曲面的 Gauss-Bonnet 公式, 注意到 S 是 $K > 0$ 的紧致连通定向曲面, 有

$$\iint_S d\bar{\sigma} = \iint_S K d\sigma = 4\pi,$$

其中 $d\sigma, d\bar{\sigma}$ 的局部表示为

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv, \quad d\bar{\sigma} = |\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v| du dv.$$

从而

$$\begin{aligned} 4\pi &= \iint_S K d\sigma = \iint_{S \setminus U} K d\sigma + \iint_U K d\sigma \\ &\geq \iint_{S \setminus U} d\bar{\sigma} + \iint_U K d\sigma = 4\pi + \iint_U K d\sigma. \end{aligned}$$

可是 $\iint_U K d\sigma > 0$, 所以上式是矛盾的.

再由于可微性是局部性质, 综上所述, 所论整体一一到上的局部微分同胚 N 自然也就是整体微分同胚. 证毕.

注 这道题其实是著名的 Hadamard 定理. 熟悉覆盖映射理论的读者可将上述证明作如下简化:

先如 (i), 说明 N 是局部微分同胚.

由于 S 紧致, S^2 连通, 所以局部同胚 N 就是 $S \rightarrow S^2$ 的一个覆盖映射.

再因为 S^2 单连通, 曲面 $S \subset \mathbb{E}^3$ 连通因而亦道路连通, 所以覆盖映射 N 必为同胚. 进而 N 自然也就是一个整体微分同胚.

例 84 设 S 为总曲率 $K > 0$ 的紧致连通定向曲面. 设 $O \subset S$ 是一条简单闭测地线, 并设 A 和 B 是 S 的两个以 O 为公共边界的区域. 证明: 在 Gauss 映射 $N: S \rightarrow S^2$ 之下, $N(A)$ 与 $N(B)$ 的面积相等.

证明 由于 S 是 $K > 0$ 的紧致连通定向曲面, 根据例 83, Gauss 映射 N 是 S 到单位球面 S^2 上的微分同胚, 因此 O 在

Gauss 映射下的象 $N(O)$ 也是 S^2 上的一条简单闭曲线.

因为 S 的总曲率 $K > 0$, 所以其上任何一点沿任何切方向的法曲率 $k_n \neq 0$, 于是 O 的曲率 $k = \sqrt{k_g^2 + k_n^2} = |k_n| \neq 0$. 因此, 测地线 O 的主法向量处处与 S 在该点的法向量平行: $N \parallel n$, 或记作 $N = \varepsilon n$, $\varepsilon = \pm 1$. 但是, N 和 n 是沿 O 整体定义的光滑向量场, 所以光滑函数 $\varepsilon = N \cdot n$ 就只能恒为 $+1$ 或恒为 -1 . 不失一般性, 可设 $N = n$. 于是 O 在 Gauss 映射下的象 $N(O)$ 也就是 O 的主法线球的球面象 (或称为球面标线).

根据 Jacobi 证明的下列定理: 对一条曲率非零的正则空间闭曲线, 如果它的主法线的球面象是单位球面上的简单曲线, 则主法线的球面象必平分此单位球面的面积 (其证明参见苏步青、胡和生教授等编《微分几何》第三章 § 2), 故我们这里的 $N(O)$ 平分单位球面的面积, 所以 $N(A)$ 与 $N(B)$ 的面积相等. 证毕.

§ 2 等宽曲面

平面曲线中的等宽曲线这一概念在曲面的情形也有类似的推广, 这就是等宽曲面的概念. 我们用以下的一些例题来分别叙述它的定义与有关的性质.

例 85 设 S 是 $\mathbb{E}^3$ 中的卵形面 (即总曲率 $K > 0$ 的紧致连通定向曲面). 证明: $\forall P \in S$, 存在唯一的 $\bar{P} \in S$, 使 P 与 $\bar{P}$ 处的切平面 T_P 与 $T_{\bar{P}}$ 相互平行. 若对 S 上任何一对这样的点 P 与 $\bar{P}$, 切平面 T_P 与 $T_{\bar{P}}$ 之间的距离为不变的常数 c , 则 $P\bar{P}$ 为 P (或 $\bar{P}$) 点的法线.

证明 根据 Hadamard 定理, 卵形面 S 到单位球面 S^2 的 Gauss 映射是整体微分同胚 (见例 83), 因此对于任何一个单位方向 n_0 , 有且仅有一点 $P_0 \in S$, 使 S 在 P_0 点的单位法方向 $n(P_0) = n_0$. 于是, $\forall P \in S$, 必有唯一的 $\bar{P} \in S$, 使 $n(\bar{P}) = -n(P)$. 这时

S 分别在 P 与 $\bar{P}$ 的切平面 T_P 与 $T_{\bar{P}}$ 自然是平行的。

若设 P 点附近的局部坐标为 (w^1, w^2) , P 的向量表示为 $r = r(w^1, w^2)$, 则上述由 P 唯一决定的 $\bar{P}$ 点就可表示为

$$\bar{r} = r(w^1, w^2) + \lambda n(w^1, w^2) + \mu r_1(w^1, w^2) + \nu r_2(w^1, w^2), \quad (1)$$

当 P 在它所属的坐标邻域 Σ 中变化时, $\bar{P}$ 就在对应的某个邻域 $\bar{\Sigma}$ 中变化. (1) 中的 $n(w^1, w^2)$ 是 S 在 P 点的单位法向量, 而 λ, μ, ν 均为 (w^1, w^2) 的待定函数. 由 T_P 与 $T_{\bar{P}}$ 间的距离皆为常数 c 的条件, 易知

$$\lambda = (\bar{r} - r) \cdot n = \pm c,$$

这里的 $\pm$ 号视 S 的正定向是取内法向或外法向而定。

对 (1) 的两端取微分, 利用 Gauss 公式和 Weingarten 公式,

并注意到 c 为常数, 我们有

$$\begin{aligned} d\bar{r} = dr + \sum_{i,j=1}^2 \omega_i^j dw^j r_i + \mu \left(\sum_{i,j=1}^2 I_{ij}^1 dw^j r_i + \sum_{j=1}^2 \Omega_{2j} dw^j n \right) \\ + d\mu \cdot r_1 + \nu \left(\sum_{i,j=1}^2 I_{ij}^2 dw^j r_i + \sum_{j=1}^2 \Omega_{2j} dw^j n \right) + d\nu \cdot r_2. \end{aligned}$$

由于 $T_P \parallel T_{\bar{P}}$, 在上式两端同用 n 作内积, 则有

$$\sum_{j=1}^2 (\mu \Omega_{1j} dw^j + \nu \Omega_{2j} dw^j) = 0.$$

利用 dw^1, dw^2 的独立性, 即得

$$\begin{cases} \mu \Omega_{11} + \nu \Omega_{21} = 0, \\ \mu \Omega_{12} + \nu \Omega_{22} = 0. \end{cases}$$

然而 S 上点为椭圆点, $\begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{21} \\ \Omega_{12} & \Omega_{22} \end{vmatrix} > 0$, 所以上述的线性齐次方程组只有零解, $\mu = \nu = 0$. 从而 P 与其对应点 $\bar{P}$ 的向量表示满足的条件 (1) 就化简为

$$\bar{r}(w^1, w^2) = r(w^1, w^2) \pm cn(w^1, w^2),$$

这说明由 $P, \bar{P}$ 决定的向量 $\overrightarrow{P\bar{P}} = \bar{r} - r = \pm cn$, 即 $P, \bar{P}$ 的连线是

P (或 $\bar{P}$) 的法线. 证毕.

卵形面 S 上满足切平面互相平行的这样一对点 P 和 $\bar{P}$ 称为对点. 如果任何一双对点处的切平面之间的距离均为一个不变的正常数 c , 则此卵形面就称为等宽曲面. 上述的例题说明, 等宽曲面上任何一双对点的连线是它们的公共法线或二重法线.

例 83 设 P 和 $\bar{P}$ 是等宽曲面 S 上的一双对点. 证明: P 和 $\bar{P}$ 处的主方向是相互平行的. 若 k_1 与 $\bar{k}_1$ 分别是 P 和 $\bar{P}$ 处相平行的两主方向对应的主曲率, 则 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{\bar{k}_1}$ 是与 P 或 $\bar{P}$ 无关的常数.

证明 利用上例的结果, 对于对点 P 与 $\bar{P}$, 我们有

$$\bar{r} = r \pm cn.$$

若 dr 是 P 点处的一个主方向, 记 k_1 为其对应的主曲率, 则按 Rodrigues 公式, 我们有

$$d\bar{r} = dr \pm c dn = (1 \mp ck_1) dr.$$

由于 S 正则, $d\bar{r} \neq 0$, 所以 $1 \mp ck_1 \neq 0$, 也就是有 $d\bar{r} \parallel dr$. 另一方面, 按对点的性质, $\bar{n} = -n$, 对应于此 dr , 我们有

$$d\bar{n} = -dn = k_1 dr = \frac{k_1}{1 \mp ck_1} d\bar{r}.$$

仍由 Rodrigues 公式知, 对应的 $d\bar{r}$ 也是主方向. 因此 $P, \bar{P}$ 处两对应的主方向是平行的. 而且由上式知道

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{\bar{k}_1} = \frac{1}{k_1} + \left(-\frac{1 \mp ck_1}{k_1} \right) = \pm c,$$

显然它与 $P, \bar{P}$ 是无关的. 证毕.

作为这一小节的结束, 我们再介绍等宽曲面的下列重要性质.

例 87 证明: 对于等宽曲面 S , 成立

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S |H| d\sigma = 0,$$

这里的 o 是对点处两切平面间的距离, H 则是 S 的平均曲率.

证明 由例 85 知, 等宽曲面的任何一对对点 $P, \bar{P}$ 的向量

示 $\vec{r}, \bar{\vec{r}}$ 之间有关系

$$\bar{\vec{r}} = \vec{r} \pm o\vec{n}.$$

于是根据曲面论的基本公式, 我们有

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \times \bar{\vec{r}}_2 &= (\vec{r}_1 \pm o\vec{n}_1) \times (\vec{r}_2 \pm o\vec{n}_2) \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \pm o(\vec{r}_1 \times \vec{n}_2 + \vec{n}_1 \times \vec{r}_2) + o^2 \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \pm o(-\vec{r}_1 \times \omega_2^2 \vec{r}_2 - \omega_1^2 \vec{r}_1 \times \vec{r}_2) + o^2 K \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \\ &= (1 \mp 2cH + o^2 K) \vec{r}_1 \times \vec{r}_2. \end{aligned} \quad (1)$$

另一方面, 由于 $P, \bar{P}$ 处的单位法向量 $\vec{n}, \bar{\vec{n}}$ 满足 $\bar{\vec{n}} = -\vec{n}$, 所以仍由曲面论的基本公式可得

$$\begin{aligned} K \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \bar{\vec{n}}_1 \times \bar{\vec{n}}_2 = \bar{K} \bar{\vec{r}}_1 \times \bar{\vec{r}}_2 \\ &= \bar{K} (1 \mp 2cH + o^2 K) \vec{r}_1 \times \vec{r}_2, \end{aligned} \quad (2)$$

比较系数后知, 对点 $P, \bar{P}$ 处的总曲率 $K, \bar{K}$ 间有关系

$$K = \bar{K} (1 \mp 2cH + o^2 K),$$

式中的 H 是 P 处的平均曲率.

因为 S 为卵形面, 所以 $K, \bar{K} > 0$. 于是 (2) 式给出

$$1 \mp 2cH + o^2 K > 0.$$

由此, 从 (1) 知, 对点 $P, \bar{P}$ 邻近的面积元 $d\sigma, d\bar{\sigma}$ 间有关系

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} &= |\bar{\vec{r}}_1 \times \bar{\vec{r}}_2| d\omega^1 d\omega^2 = (1 \mp 2cH + o^2 K) |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| d\omega^1 d\omega^2 \\ &= (1 \mp 2cH + o^2 K) d\sigma. \end{aligned}$$

于是, 在整个 S 上积分, 并利用整体曲面的 Gauss-Bonnet 公式, 我们得到

$$\begin{aligned} \iint_S d\bar{\sigma} &= \iint_S d\sigma \mp 2c \iint_S H d\sigma + o^2 \iint_S K d\sigma \\ &= \iint_S d\sigma \mp 2c \iint_S H d\sigma + 4\pi c^2. \end{aligned}$$

由于 $\iint_S d\bar{\sigma} = \iint_S d\sigma = A(S)$, 即 S 的面积, 故

$$\iint_S H d\sigma = \pm 2\pi c.$$

因为 S 上点为椭圆点, 所以 H 或恒正, 或恒负. 因而

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S |H| d\sigma = \frac{1}{2\pi} \left| \iint_S H d\sigma \right| = c. \quad \text{证毕.}$$

§3 向量场的孤立奇点

如所知, 利用有关整体曲面上向量场孤立奇点指标的 Poincaré 定理, 可以证明球面上的向量场必有奇点. 这个深刻的结果为“地球上一定有风速是零的点”这一断语给出了数学上的证明. 以下介绍的例题或许可以作为“每个人头发的分布总有发旋”这个具体问题的数学模型, 为这一司空见惯的现象提供了理论依据.

例 88 (i) 设 $\boldsymbol{v}$ 是定义在闭半球上的光滑向量场. 如沿赤道, $\boldsymbol{v}$ 处处与之相切且非零, 则在对应的开半球内必有 $\boldsymbol{v}$ 的奇点.

(ii) 设 O 是球面 S^2 上的一条光滑简单闭曲线, $\boldsymbol{v}$ 是 S^2 上的光滑向量场, 而且 $\boldsymbol{v}$ 的轨线从不与 O 相切. 证明: 由 O 决定的 S^2 的两个区域中的每一个都至少含有 $\boldsymbol{v}$ 的一个奇点.

证明 (i) 用反证法, 设 $\boldsymbol{v}$ 在此开半球内无奇点. 将此开半球连同其上的光滑向量场 $\boldsymbol{v}$ 关于赤道所在平面作镜面反射, 这样连同原来的闭半球及其上的向量场, 我们就得到定义在整个球面上无奇点的向量场, 显然这是不可能的. 因此, $\boldsymbol{v}$ 在开半球内必有奇点.

(ii) 我们仍用反证法. 设 O 所围成的一个单连通区域 $\mathcal{O}$ 内无 $\boldsymbol{v}$ 的奇点. 取 O 的正向, 使得按此正向沿 O 行走时, 区域 $\mathcal{O}$ 始

终在左边。

在 $\mathcal{O}$ 外任取定 N 点,以它为北极作球极投影,可得 $S^2 \setminus \{N\}$ 上的等温参数坐标图,在这坐标对应之下,我们得到 $S^2 \setminus \{N\}$ 到平面上的共形对应,因而有关 $S^2 \setminus \{N\}$ 上角度的讨论均可放在平面上进行。

在 $\mathcal{O}$ 的每一点,设坐标向量 e_1 到 $\mathcal{O}$ 的单位切向量 $T(s)$ 的有向角为 $\theta(s)$ 。我们可设 $\theta = \theta(s)$, $s \in [0, L]$, 是连续可微函数,这里的 s 是 $\mathcal{O}$ 上讨论点对应的弧长, L 则是 $\mathcal{O}$ 的周长。再设 $T(s)$ 到此点对应的 $\mathcal{O}$ 的有向角为 $\alpha(s)$, $\alpha(s)$ 也可设为连续可微函数,因为 $\mathcal{O}$ 的轨线从不与 $\mathcal{O}$ 相切,这时不是 $0 < \alpha(s) < \pi$ 便是 $-\pi < \alpha(s) < 0$ 。从而 $\mathcal{O}$ 沿 $\mathcal{O}$ 的正向绕 $\mathcal{O}$ 一周时, $\mathcal{O}$ 与 e_1 交角的角度差 $\Delta_{\mathcal{O}}(\alpha + \theta) = \alpha(L) + \theta(L) - \alpha(0) - \theta(0)$ 。

其中,利用简单闭曲线的切线旋转指标定理,有

$$\theta(L) - \theta(0) = 2\pi.$$

再注意到 $\alpha(s)$ 的取值范围,就有估计式

$$2\pi - \pi < \Delta_{\mathcal{O}}(\alpha + \theta) < 2\pi + \pi,$$

即 $\pi < \Delta_{\mathcal{O}}(\alpha + \theta) < 3\pi$ 。由于角度 $\Delta_{\mathcal{O}}$ 总是 2π 的整数倍,所以只能是 $\Delta_{\mathcal{O}}(\alpha + \theta) = 2\pi$ 。但根据 Poincaré 指标定理,由于 $\mathcal{O}$ 在 $\mathcal{O}$ 内无奇点,所以 $\Delta_{\mathcal{O}}(\alpha + \theta) = 0$, 这便与上面的结果矛盾。因此, $\mathcal{O}$ 在 $\mathcal{O}$ 内必有奇点。对 $\mathcal{O}$ 所围的另一个区域,结论自然也是同样的。证毕。

§4 Gauss-Bonnet 公式

整体曲面的 Gauss-Bonnet 公式是曲面论中的一条著名定理,它也许是曲面微分几何学中一个最深刻的结果,因为它在曲面上建立了微分几何学与拓扑学的明确联系。从一方面说,它可理

解为曲面的拓扑特性对其上微分几何研究对象的一种约束,从另一方面说,它也揭示了可以利用微分几何量来计算光滑曲面拓扑不变量的一条新途径。

例如,对于 5-环面,由于其亏格数 $g=5$, 利用整体曲面的 Gauss-Bonnet 公式,立即可知它的全曲率必须是

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S)$$

$$= 2\pi \cdot 2(1-g)$$

$$= -16\pi,$$

这与此 5-环面的具体外形是无关的。

只要想想 5-环面的各种可能情况有多么复杂,就能体会到 Gauss-Bonnet 公式所揭示的联系有多深刻。

又如,对于球面 S^2 : $\mathbf{r} = (R \cos v \cos u, R \cos v \sin u, R \sin v)$, 直接计算可得 $E = R^2 \cos^2 v$, $F = 0$, $G = R^2$ 。因此,按照 Gauss-Bonnet 公式

$$2\pi\chi(S^2) = \iint_{S^2} K d\sigma = \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos v dv = 4\pi,$$

即球的 Euler-Poincaré 示性数 $\chi(S^2) = 2$ 。

对于环面 T^2 : $\mathbf{r} = ((a+r \cos u) \cos v, (a+r \cos u) \sin v, r \sin u)$, 由于总曲率 $K = \frac{\cos u}{r(a+r \cos u)}$, 面积元 $d\sigma = r(a+r \cos u) du dv$, 所以代入 Gauss-Bonnet 公式后有

$$2\pi\chi(T^2) = \iint_{T^2} K d\sigma = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} \cos u du = 0,$$

即环面 T^2 的示性数 $\chi(T^2) = 0$ 。这些拓扑不变量都是由微分几何

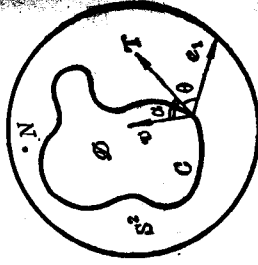


图 13

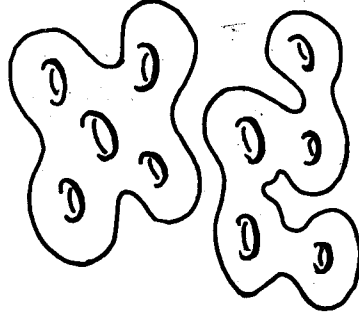


图 14

量计算得到的。

以下我们举些例题来说明 Gauss-Bonnet 公式的应用。

例 89 在总曲率 K 是负常数的曲面 S 上, 设 $\mathcal{D}$ 是由四条渐近曲线构成的曲面四边形, 它的四个内角分别为 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 试证明: $\mathcal{D}$ 的面积 $A = \frac{1}{|K|} |2\pi - \alpha - \beta - \gamma - \delta|$.

证明 由于 S 的 Gauss 曲率 $K < 0$, 所以 S 上存在两族渐近曲线, 我们把这两族渐近曲线取为参数曲线, 又由于 K 为负常数, 所以这两族曲线构成 Чебышев (即 Chebyshev) 网 (参见例 43), 因而在这种参数曲线网之下曲面的第一基本形式能写成

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega \, du \, dv + dv^2, \quad (1)$$

这里的 $\omega = \omega(u, v)$ 是 u 曲线与 v 曲线在 (u, v) 点的交角, 一般取 $0 < \omega < \pi$.

若记 $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}$, 则 u 曲线的测地曲率

$$k_{g_1} = (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_1) \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds},$$

式中的 $\mathbf{n}$ 是曲面沿此 u 曲线的单位法向量, s 则是这条 u 曲线的弧长. 利用曲面的基本公式, 我们有

$$\begin{aligned} k_{g_1} &= \left(\mathbf{n} \times \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}} \right) \cdot \left(\mathbf{r}_{uu} \frac{du}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} + \mathbf{r}_u \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \right) \right) \\ &= - \left(\mathbf{n} \times \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}} \right) \cdot (\Gamma_{11}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_v + \Omega_{11} \mathbf{n}) \frac{du}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \\ &= - \frac{1}{E} \Gamma_{11}^2 \frac{du}{ds} (\mathbf{n}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ &= \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} \Gamma_{11}^2 \frac{du}{ds}. \end{aligned}$$

类似地, v 曲线的测地曲率应为

$$k_{g_2} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G} \Gamma_{22}^1 \frac{dv}{ds},$$

这里的 s 则表示所论 v 曲线的弧长. 由于 (1) 式成立, 因此

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 g^{2k} \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[g^{21} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) \right] \\ &= g^{22} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \\ &= - \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}, \end{aligned}$$

类似地有

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 g^{1k} \left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^k} \right)$$

$$\begin{aligned} &= g^{11} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} \\ &= - \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial v}. \end{aligned}$$

于是我们得到 u 曲线与 v 曲线的测地曲率分别为

$$k_{g_1} = - \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot \frac{du}{ds}, \quad k_{g_2} = - \frac{\partial \omega}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds}. \quad (2)$$

现在可以对单连通区域 $\mathcal{D}$ 应用 Gauss-Bonnet 公式, 有

$$4\pi - \alpha - \beta - \gamma - \delta + \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} k_g \, ds + \iint_{\mathcal{D}} K \, d\sigma = 2\pi \chi(\mathcal{D}), \quad (3)$$

这里的 C_i 是 $\mathcal{D}$ 的边界, $i=1, 2, 3, 4$. 设它由如下的四条坐标曲线构成:

$$C_1: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_1), \quad u_1 \leq u \leq u_2;$$

$$C_2: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_2, v), \quad v_1 \leq v \leq v_2;$$

$$C_3: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_2), \quad u_1 \leq u \leq u_2 \quad (\text{积分时取反向});$$

$$C_4: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, v), \quad v_1 \leq v \leq v_2 \quad (\text{积分时取反向}).$$

因此, 利用计算得到的测地曲率 (2), 我们有

$$= -\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v}. \quad (4)$$

因而区域 $\mathcal{D}$ 的面积便可如下计算为

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\mathcal{D}} d\sigma = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{EG-F^2} \, du \, dv = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \sin \omega \, du \, dv \\ &= -\frac{1}{K} \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \, du \, dv \\ &= -\frac{1}{|K|} [\omega(u_2, v_2) - \omega(u_2, v_1) - \omega(u_1, v_2) + \omega(u_1, v_1)], \end{aligned} \quad (5)$$

这是利用了(4)和 K 为负常数的缘故。若用内角来表示, 注意到上式中 $\omega(u_2, v_1)$, $\omega(u_1, v_2)$ 为外角, 所以(5)最终化为

$$A = \frac{1}{|K|} |2\pi - \alpha - \beta - \gamma - \delta|.$$

等式(4)即 $-\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = K \sin \omega$, 这是现代数学前沿阵地之一孤立子理论中有名的 Sine-Gordon 方程。由此也可推知具负常总曲率的曲面与孤立子理论有一定的联系。

例 90 已知伪球面 S 的向量表示为 $r(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \ln(\sec v + \operatorname{tg} v) - a \sin v)$, $0 \leq v < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq u < 2\pi$, 常数 $a > 0$. 证明 S 上任何一条纬线的测地曲率等于 $\frac{1}{a}$, 进而利用 Gauss-Bonnet 公式证明 S 的总面积为 $2\pi a^2$.

证明 因为

$$\begin{aligned} r_u &= (-a \cos v \sin u, a \cos v \cos u, 0), \\ r_v &= (-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, a \sec v - a \cos v), \end{aligned}$$

所以伪球面第一基本形式的系数

$$E = a^2 \cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 \operatorname{tg}^2 v. \quad (1)$$

因此, 纬线(即 $v = \text{const}$)的测地曲率可由 Liouville 公式计算为

• 171 •

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} k_g ds &= \omega(u_1, v_1) - \omega(u_2, v_1) + \omega(u_2, v_1) - \omega(u_2, v_2) \\ &\quad + \omega(u_2, v_2) - \omega(u_1, v_2) + \omega(u_1, v_2) - \omega(u_1, v_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

再注意到 K 是负常数, 且 $\chi(\mathcal{D}) = 1$, $A > 0$, 因而(3)就化为

$$A = \frac{1}{|K|} |2\pi - \alpha - \beta - \gamma - \delta|. \text{ 证毕.}$$

注 本例还可有如下证法。

利用一般参数下的 Gauss 方程(参见苏步青、胡和生教授等编的《微分几何》第 128 页的习题 6), 并注意到上述证法中(1)给出的第一基本形式, 现在的

$$E = G = 1, \quad F = \cos \omega,$$

因此通过直接计算我们就可以得到曲面的总曲率

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} & \frac{1}{2} E_u & \frac{1}{2} E_v - \frac{E_0}{2} \\ F_u - \frac{1}{2} G_u & E & F \\ \frac{1}{2} G_v & F & G \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} E_0 & \frac{1}{2} G_u \\ -\frac{1}{2} E_0 & E & F \\ \frac{1}{2} G_u & F & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -\sin \omega \cdot \omega_u \\ 1 & \cos \omega \\ \cos \omega & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin^4 \omega} \begin{vmatrix} -\cos \omega \cdot \omega_u \omega_v - \sin \omega \cdot \omega_{uv} & 0 & -\sin \omega \cdot \omega_u \\ -\sin \omega \cdot \omega_v & 1 & \cos \omega \\ 0 & \cos \omega & 1 \end{vmatrix}$$

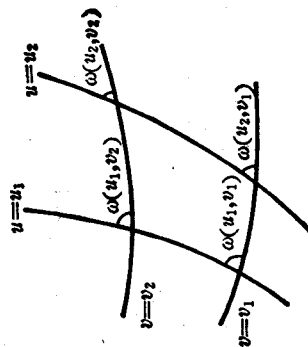


图 15

(交角 $\varphi=0$)

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln H}{\partial v} \cos \varphi + \frac{1}{2\sqrt{H}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin \varphi \\ &= -\frac{1}{2a} \frac{\partial \ln v}{\partial v} \frac{\partial \ln(a^2 \cos^2 \varphi)}{\partial v} = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (2)$$

在 S 上取两条纬线 O_1, O_2 , 它们分别对应于 $v=v_1, v=v_2$, 不妨设 $0 < v_1 < v_2$. 记 O_1, O_2 围成的 S 上的有界区域为 D , 对 D 应用 Gauss-Bonnet 公式, 由于 O_1, O_2 光滑, 无角点, 有

$$\int_{O_1-O_2} k_g ds + \iint_D K d\sigma = 2\pi \chi(D), \quad (3)$$

这里的 k_g 由 (2) 式决定, Gauss 曲率 K 可直接由 (1) 按 Gauss 方程计算得到为 $-\frac{1}{a^2}$, D 的示性数则为 $\chi(D)=0$. 于是若记 D 的面积为 $A(D)$, 则由 (3) 得到

$$\frac{1}{a} L(O_1) - \frac{1}{a} L(O_2) - \frac{1}{a^2} A(D) = 0. \quad (4)$$

注意到 O_1, O_2 的周长分别为

$$L(O_1) = 2\pi a \cos v_1, \quad L(O_2) = 2\pi a \cos v_2,$$

在 (4) 式中令 $v_1 \rightarrow 0, v_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 则有

$$\frac{1}{a} \cdot 2\pi a - \frac{1}{a^2} A(S) = 0,$$

即伪球面 S 的总面积 $A(S) = 2\pi a^2$.

注 若将本例中的 S 与它关于 xOy 平面对称的部分合在一起作为一个完整的伪球面 S^* , 我们发现 S^* 的总面积恰为 $A(S^*) = 4\pi a^2$, 与 Gauss 曲率为 $\frac{1}{a^2}$ 的球面面积一样, 至于 S^* 所围成的体积 V 则要比对应的球体积 $\frac{4\pi a^3}{3}$ 小多了, 对之我们可计算如下:

$z \geq 0$ 这部分体积是由 yOz 平面中的曲线

$$\begin{cases} y = a \cos v, \\ z = a \ln(\sec v + \tan v) - a \sin v, \end{cases} \quad (0 \leq v < \frac{\pi}{2})$$

绕 z 轴旋转后与 xOy 平面围成的, 它等于

$$\begin{aligned} V_+ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dz = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos^2 v (\sec v - \cos v) dv \\ &= \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos v - \cos^3 v) dv = \pi a^3 \cdot \frac{1}{3} \sin^3 v \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi a^3}{3}, \end{aligned}$$

所以 S^* 所围成的体积 $V = 2V_+ = \frac{2\pi a^3}{3}$, 只有相应球体积的一半.

如所知, 对一条曲率非零的正则空间闭曲线, 如果它主法线的球面象是单位球面上的简单闭曲线, 则必平分此单位球面的面积. 接下来, 人们的兴趣自然会集中到讨论切线的球面象与从法线的球面象上去, 对此我们有下面的

例 91 设 O 是空间正则闭曲线, 挠率 $\tau \neq 0$. 证明: O 的从法线的球面象 $\bar{O}$ 不可能成为单位球面上的简单闭曲线.

证明 用反证法. 设 O 的向量表示是 $r=r(s)$, s 为弧长. 这时, O 的从法线的球面象 $\bar{O}$: $\bar{r}=B(s)$ 若是单位球面上的简单闭曲线, 如记它围成的正定向单连通区域为 Ω , 则由 Gauss-Bonnet 公式,

$$\int_{\partial\Omega} \bar{k}_g d\bar{s} + \iint_{\Omega} K d\sigma = 2\pi \chi(\Omega), \quad (1)$$

这里的 $\bar{s}$ 是 $\bar{O}$ 的弧长, $\bar{k}_g$ 是 Ω 的边界 $\partial\Omega=\bar{O}$ 的测地曲率. 由于 $\bar{O}$ 的单位切向量

$$\bar{T} = \frac{d\bar{B}}{d\bar{s}} = -\tau N \cdot \frac{ds}{d\bar{s}}, \quad (2)$$

再对 $\vec{s}$ 求导, 有

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = (-\tau'N + k\tau\vec{T} - \tau^2\vec{B})\left(\frac{ds}{ds}\right)^2 - \tau N \frac{d^2s}{ds^2},$$

所以 $\vec{O}$ 的测地曲率

$$\begin{aligned} \vec{k}_g &= (\vec{n} \times \vec{T}) \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \left(\vec{B} \times \frac{d\vec{B}}{ds} \right) \cdot \frac{d^2\vec{B}}{ds^2} \\ &= \tau^2 k \left(\frac{ds}{ds} \right)^3 = k \frac{ds}{ds}, \end{aligned} \quad (3)$$

最后的等式是由(2)可得 $\tau^2 \left(\frac{ds}{ds} \right)^2 = 1$ 的缘故. 注意到单位球面的 Gauss 曲率 $K=1$, Ω 为单连通, 所以把(3)代入(1)可得

$$\int_{\sigma} k \frac{ds}{ds} d\vec{s} + \iint_{\Omega} d\sigma = 2\pi,$$

此即

$$\int_{\sigma} k(s) ds + A(\Omega) = 2\pi. \quad (4)$$

但由 Fenchel 定理, σ 的全曲率 $\int_{\sigma} k(s) ds \geq 2\pi$, 由(4)只能有 Ω 的面积 $A(\Omega) = 0$, 这是矛盾的. 证毕.

在叙述切线的球面象的有关结果之前, 我们需要下例的结论.
例 92 设 $O: \vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in [0, L]$, 是球面上的正则闭曲线, 这里 s 为弧长, L 为 O 的周长, 则它的全挠率

$$\int_0^L \tau(s) ds = 0.$$

证明 设此球面沿 O 的单位法向量 $\vec{n}(s)$ 到 O 的主法向量 $N(s)$ 的有向夹角为 $\theta(s)$, 不妨设 $\theta(s)$ 是 $[0, L]$ 上的连续可微函数, 即 $\theta(s)$ 可视为 $[0, L]$ 到单位圆周 S^1 的某个可微映射 f 的提升. 这时, 利用苏步青、胡和生教授等编《微分几何》第 157 页习题 1 中介绍的标架, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\vec{n}(s) \cdot N(s)) &= \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot N + \vec{n} \cdot \frac{dN}{ds} \\ &= (-k_n \vec{T} - \tau_g \tau^\circ) \cdot N + \vec{n} \cdot (-k\vec{T} + \tau\vec{B}) \\ &= \tau_g \sin \theta - \tau \sin \theta. \end{aligned}$$

$$\text{此即 } -\sin \theta(s) \cdot \frac{d\theta(s)}{ds} = \tau_g(s) \cdot \sin \theta(s) - \tau(s) \sin \theta(s).$$

由于球面上点为脐点, 从而任何曲线皆为曲率线, 于是 $\tau_g(s) = 0$, $\forall s \in [0, L]$. 因而有

$$\sin \theta(s) \frac{d\theta(s)}{ds} = \tau(s) \sin \theta(s). \quad (1)$$

这时, 若对 $s_0 \in [0, L]$, $\sin \theta(s_0) \neq 0$, 则由(1)得出 $\frac{d\theta}{ds} = \tau$ 在 s_0 成立. 若对 $s_0 \in [0, L]$, $\sin \theta(s_0) = 0$, 则如果存在 $s_n \in [0, L]$, 使 $\sin \theta(s_n) \neq 0$ 且 $s_n \rightarrow s_0$, $n \rightarrow \infty$, 那么根据连续性, $\frac{d\theta}{ds} = \tau$ 在 s_0 成立; 如果找不到上述的 s_n , 那么就有 s_0 在 $[0, L]$ 中的邻域 I_{s_0} , 其上有 $\sin \theta(s) \equiv 0$. 从而 $\vec{n}(s) \parallel N(s)$ 便在 I_{s_0} 上成立, 这就是说 O 在 I_{s_0} 这一段是大圆弧, 即 $\tau(s) = 0$, $\forall s \in I_{s_0}$. 对应的 $\theta(s)$ 也只能取常值, 即 $\frac{d\theta}{ds} = 0$, 于是仍有 $\frac{d\theta}{ds} = \tau$ 在 s_0 成立. 综上所述, $\forall s \in [0, L]$, 总有 $\frac{d\theta(s)}{ds} = \tau(s)$ 成立. 对之积分后得到

$$\int_0^L \tau(s) ds = \theta(L) - \theta(0) = 2n\pi,$$

式中的整数 n 便是原来的那个光滑映射 f 的度数, 即 $n = \deg f$.

取定 $P_0 \in O$, 在 S 上将 O 收缩成点 P_0 , 且在收缩过程中, 每一条中间过程曲线 O_t 与 O 在 P_0 附近总有一小段重合. 对这些 O_t , 也可考察 S 的法向量 $\vec{n}$ 与 O_t 的主法向量 N_t 的位置关系, 从而得到一族相应区间到单位圆周的光滑映射 f_t , 由 O_t 的作法知

道, f_i 是起终点一致地同伦于常值映射 f_0 . 从而 $\deg f = \deg f_0 = 0$, 这就说明 O 的全挠率为零. 证毕.

注 对球面上的正则闭曲线 O , 它的全曲率 $\int_O k(s) ds$ 就没有类似性质, 当 O 变化时, 正数集合 $\left\{ \int_O k(s) ds \right\}$ 事实上是无界的, 即使对简单的球面闭曲线, 也是如此, 读者可试举例说明. 然而对一般的球面正则闭曲线 O , 却总成立 $\int_O \frac{\tau(s)}{k(s)} ds = 0$, 对之可参见例 8.

例 93 设 O 是某一球面上的正则闭曲线. 若 O 的切线的球面象 $\bar{O}$ 是简单闭曲线, 则 $\bar{O}$ 必平分单位球面的面积.

证明 设 O 的向量表示为 $r = r(s)$, s 为弧长. 由于 O 是某球面上的曲线, 所以它的曲率 $k(s) \neq 0$. O 的切线的球面象 $\bar{O}$ 应有表示 $\bar{r} = T(s)$, 我们把 $\bar{O}$ 的弧长设为 $\bar{s}$. 这时 $\bar{O}$ 的测地曲率

$$\bar{k}_g = (n \times \bar{T}) \cdot \frac{d\bar{T}}{d\bar{s}} = \left(T \times \frac{dT}{ds} \right) \cdot \frac{d^2 T}{ds^2},$$

其中

$$\frac{dT}{ds} = kN \frac{ds}{d\bar{s}}, \quad \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

$$\frac{d^2 T}{ds^2} = (k'N - k^2 T + k\tau B) \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2 + kN \frac{d^2 s}{ds^2}.$$

因而

$$\bar{k}_g = k^2 \tau \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^3 = \tau \frac{ds}{d\bar{s}}.$$

在单位球面上, 对 $\bar{O}$ 所围正定向的单连通域 Ω 用 Gauss-Bonnet 公式, 由于 $\bar{O}$ 正则, 有

$$\int_{\partial\Omega} \bar{k}_g d\bar{s} + \iint_{\Omega} K d\sigma = 2\pi \chi(\Omega).$$

将已知的量 $\bar{k}_g = \tau \frac{ds}{d\bar{s}}$, $K=1$, $\chi(\Omega)=1$ 代入上式, 即得

$$\int_O \tau(s) ds + A(\Omega) = 2\pi.$$

根据例 92, 球面上正则闭曲线 O 的全挠率 $\int_O \tau(s) ds = 0$, 所以 Ω 的面积 $A(\Omega) = 2\pi$, 即 $\bar{O}$ 平分单位球面的面积. 证毕.

注 若把例 93 中的条件改为“ O 是一条具非零曲率的正则闭曲线, 并且 O 的切线的球面象是简单正则的闭曲线”, 则结论就变为 O 的全挠率满足不等式

$$-2\pi < \int_O \tau(s) ds < 2\pi.$$

其实, 如同例 93 的想法, 对 O 的切线象在单位球面上所围的单连通区域 Ω 应用 Gauss-Bonnet 公式, 我们仍能得到等式 $\int_O \tau(s) ds + A(\Omega) = 2\pi$. 注意到球面上单连通区域 Ω 的面积应有限制 $0 < A(\Omega) < 4\pi$, 我们立即得到要证的结果.

在微分几何中, 有关曲面上简单闭测地线的问题一直是个饶有兴味的专题. 利用整体曲面上的 Gauss-Bonnet 公式, 我们能初步揭示它们的一些有关性.

我们先从最简单的情形看起. 在总曲率非正的定向曲面上, 是不存在围成单连通域的简单闭测地线的. 不然的话, 对此简单闭测地线所围的单连通域 Ω 应用 Gauss-Bonnet 公式, 我们便有 $\iint_{\Omega} K d\sigma = 2\pi \chi(\Omega) = 2\pi$, 显然这与总曲率 $K \leq 0$ 的条件是矛盾的.

如果推广到逐段光滑的曲线的情形, 上述的简单闭测地线可改为由两条光滑的测地线组成, 或者换一种说法, 那就是下面的

例 94 设 S 是总曲率 $K \leq 0$ 的定向曲面. 证明: 从 S 上一点出发的两条测地线不可能再度相交, 使它们围成 S 上的一个单连

通区域.

证明 仍用反证法和 Gauss-Bonnet 公式, 这次在公式中应有外角出现. 但由于交于同一点的两条不同的测地线不会相切, 所以在角点处的外角 $\theta_i < \pi$, $i=1, 2$. 如果还是把它们所围的单连通域记为 Ω , 那么

$$\theta_1 + \theta_2 + \iint_{\Omega} K d\sigma = 2\pi\chi(\Omega) = 2\pi,$$

此式仍然与总曲率 $K \leq 0$ 的假设矛盾. 证毕.

现在我们能证明下面的有趣结果.

例 95 设定向曲面 S 与柱面 (比如圆柱面) 同胚, 且总曲率 $K < 0$, 则 S 上至多只有一条简单闭测地线.

证明 假定 S 已经有了一条简单的闭测地线 C_1 , 由例 94 前面的说明知道, 它不能围成单连通区域, 因而也就只能处于如图所示的位置. 用反证法. 如果 S 上还有另一条简单闭测地线 C_2 , 那么它也不能围成单连通域, 而且必有 $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. 不然的话就会发生 C_1 与 C_2 上的两段弧交于两点, 且围成单连通域的情形, 由例 94 知道这是不允许的. 于是我们对 S 上由 C_1, C_2 截得的区域 $\mathscr{D}$ 应用 Gauss-Bonnet 公式, 有

$$\iint_{\mathscr{D}} K d\sigma = 2\pi\chi(\mathscr{D}).$$

因为 $\chi(\mathscr{D}) = 0$, 上式便与题中 $K < 0$ 的条件矛盾, 所以 S 上至多只能有一条简单闭测地线. 证毕.

然而在正曲率曲面上, 情况就不一样了. 比如在球面上, 就不止只有一条简单闭测地线, 而且我们发现, 任何两条简单闭测地

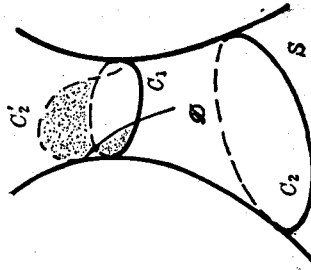


图 16

线——大圆, 都是相交的. 这条性质可推广到卵形面上去, 这便是下例.

例 96 设 S 为总曲率 $K > 0$ 的紧致连通定向曲面. 如果 S 上存在两条简单闭测地线, 则它们必定相交.

证明 因为 S 是总曲率 $K > 0$ 的紧致连通定向曲面, 所以 S 一定与球面同胚 (参见例 83). 以下用反证法. 如果 S 上的两条简单闭测地线 C_1 与 C_2 不相交, 取定分别由 C_1 和 C_2 围成的单连通域 Ω_1 和 Ω_2 , 使得 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. 这时 $S \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathscr{D}$ 就与平环面同胚, 因而它的 Euler-Poincaré 示性数 $\chi(\mathscr{D}) = 0$, 于是按 Gauss-Bonnet 公式,

$$\iint_{\mathscr{D}} K d\sigma = 2\pi\chi(\mathscr{D}) = 0,$$

显然, 这与总曲率 $K > 0$ 的题设条件是矛盾的. 证毕.

§5 有关总曲率 K 与平均曲率 H 的一些结果

我们先介绍下例给出的著名的 Willmore 不等式, 它确定了平均曲率的平方 H^2 在圆环面上积分的下界.

例 97 设 T^2 是 $\mathbb{E}^3$ 中任意给定的圆环面. 证明:

$$\iint_{T^2} H^2 d\sigma \geq 2\pi^2. \quad (1)$$

证明 设 T^2 的向量表示为

$$\mathbf{r}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

其中 $0 \leq u, v < 2\pi$, 而 a, r 为正常数, 且 $a > r$. 通过直接计算可得, T^2 的第一、第二基本形式的系数为

$$E = r^2, F = 0, G = (a + r \cos u)^2;$$

$$L = r, M = 0, N = \cos u \cdot (a + r \cos u).$$

因此 T^2 的平均曲率

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{\cos u}{a+r \cos u} \right)$$

$$= -\frac{1}{2r} \left(2 - \frac{a}{a+r \cos u} \right),$$

$$\text{从而} \quad H^2 = \frac{1}{4r^2} \left[4 - \frac{4a}{a+r \cos u} + \frac{a^2}{(a+r \cos u)^2} \right].$$

又由于 T^2 上的面积元为

$$d\sigma = \sqrt{EG} du dv = r(a+r \cos u) du dv,$$

把 H^2 与 $d\sigma$ 的表达式代入(1)的左端, 有

$$\begin{aligned} \iint_{T^2} H^2 d\sigma &= \frac{1}{4r^2} \iint_{T^2} \left[4r(a+r \cos u) - 4ar + \frac{a^2 r}{a+r \cos u} \right] du dv \\ &= \frac{a^2}{4r^2} \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} \frac{r du}{a+r \cos u} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{du}{\frac{a}{r} + \cos u}. \end{aligned} \quad (2)$$

为计算(2)式右端的积分, 作变换 $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = t$, 这时

$$\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad du = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

若记 $\frac{a}{r} = e$, 则由于

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\frac{a}{r} + \cos u} &= \int \frac{1}{e + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{e(1+t^2) + 1 - t^2} \\ &= 2 \int \frac{dt}{(e-1)t^2 + e + 1} = \frac{2}{\sqrt{e^2-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} t \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{e^2-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right). \end{aligned}$$

因而(2)式化为

$$\begin{aligned} \iint_{T^2} H^2 d\sigma &= \frac{\pi e^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{du}{e + \cos u} = \frac{\pi e^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{e + \cos u} \\ &= \frac{\pi e^2}{\sqrt{e^2-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2 e^2}{\sqrt{e^2-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

为估计(3)式右端当 $e = \frac{a}{r}$ 变化时的下界, 我们分析函数

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}, \quad x > 1, \text{ 的变化情况. 直接计算可得}$$

$$f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}, \quad (4)$$

因此 f 可能取极值的点, 即 $f'(x) = 0$ 的 x 为 $x=2$. 又由于

$$f''(2) = \frac{(x-1)^{3/2} - \frac{3}{2}(x-1)^{1/2}(x-2)}{2(x-1)^3} \Big|_{x=2} = \frac{1}{2} > 0,$$

所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 这时 $f(2) = 2$. 另一方面, 从(4)式可知, $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 单调下降, 在 $(2, +\infty)$ 单调上升, 因此, $f(2) = \min_{x \in (1, \infty)} f(x)$. 基于这些事实, (3)式便给出要证的不等式 $\iint_{T^2} H^2 d\sigma \geq 2\pi^2$. 证毕.

注 由上面最后一段的讨论也可看出, 当 T^2 的向量表示中的两个正常数 a, r 满足 $\frac{a}{r} = 2$ 时, 对应的圆环面 T^2 能使(1)中的等号成立 $\iint_{T^2} H^2 d\sigma = 2\pi^2$.

如所知, 球面的刚性是由下列的 Liebman 定理推出的: 设 S 是总曲率 K 为常数的紧致连通曲面, 则 S 是球面. 从这条定理的证明过程可以看出, 对于总曲率 $K > 0$ 的紧致连通曲面 S , 记 k_1, k_2 是 S 上各点的主曲率函数, 并总设 $k_1 \geq k_2$, 那么只要 k_2 能够表示为 k_1 的递减函数 $k_2 = f(k_1)$, 则 S 必为球面(参见苏步青、胡和

生教授等编的《微分几何》第三章§4). 由此易知, 对于总曲率 $K > 0$ 的紧致连通曲面, 如果 K 为常数, 或 H 为常数的话, 则 S 就是球面. 后一事实可推广为下例叙述的结论.

例 98 设 S 为总曲率 $K > 0$ 的紧致连通曲面, 它的总曲率 K 与平均曲率 H 满足关系式 $aK + 2bH + c = 0$, 其中 a, b, c 是适合条件 $b^2 - ac > 0$ 的常数. 证明: S 是球面.

证明 如上, 记 S 的主曲率为 k_1, k_2 , 并总设 $k_1 \geq k_2$. 若 $aK + 2bH + c = 0$, 则

$$\begin{aligned}
 & ak_1k_2 + b(k_1 + k_2) + c = 0, \\
 & (ak_1 + b)k_2 = -(bk_1 + c). \quad (1)
 \end{aligned}$$

我们把它改写成

这时必有 $ak_1 + b \neq 0$, 因为不然的话也就有 $b k_1 + c = 0$, 但是

$$\begin{cases} ak_1 + b = 0 \\ bk_1 + c = 0 \end{cases}$$

的行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 \neq 0$, 这便与上述线性代数方程组有非零解 $(k_1, 1)$ 矛盾. 因此我们可把(1)式写成

$$k_2 = -\frac{bk_1 + c}{ak_1 + b} = f(k_1).$$

再因为

$$\frac{d}{dk_1} f(k_1) = \frac{-b(ak_1 + b) + a(bk_1 + c)}{(ak_1 + b)^2} = -\frac{b^2 - ac}{(ak_1 + b)^2} < 0,$$

即 $k_2 = f(k_1)$ 是 k_1 的递减函数, 所以根据本例前面所述的结论知, S 必定是球面. 证毕.

由本章§1的例 83 知道, 对于总曲率 $K > 0$ 的紧致连通定向曲面 S (简称为卵形面), Gauss 映射 $N: S \rightarrow S^2$ 是微分同胚, 从而 S 上的点与其上的单位法向量 n 是一一对应的, 于是 S 上一切由点

决定的函数均可改为由单位球面 S^2 上对应的点, 即 S 的单位法向量决定. 特别地, S 的总曲率 $K = K(n)$. 下例说明, 当 $K(n)$ 已知时, 卵形面 S 的形状是唯一决定的, 我们采用的是陈省身教授提供的证明方法 (参见北京大学数学丛书《微分几何讲义》, 陈省身、陈维恒著).

例 99 证明 Minkowski 定理: 设 S 是卵形面, 其总曲率为 K . 那么函数 $K(n)$ 在仅相差一个平移的范围内可决定 S .

证明 设 (u, v) 为单位球面 S^2 上的等温参数, 我们把 S^2 的向量表示记为 $n = n(u, v)$. 按等温参数的定义, 有

$$\begin{cases} n_u \cdot n_u = n_v \cdot n_v = A(u, v) > 0, \\ n_u \cdot n_v = 0. \end{cases} \quad (1)$$

因为 Gauss 映射 $N: S \rightarrow S^2$ 是微分同胚, 利用它的逆映射 N^{-1} , 我们可以将球面 S^2 上的上述参数 (u, v) 作为 S 上的参数, 这时 $n(u, v)$ 就是 S 在 $r(u, v)$ 处的单位法方向.

由于 $n \cdot n_u = n \cdot n_v = 0$, 所以 n_u, n_v 均为 S 上的切向量, 又由(1), 它们是线性独立的. 因此, 我们可设

$$\begin{cases} r_u = an_u + bn_v, \\ r_v = bn_u + cn_v, \end{cases} \quad (2)$$

这里已经利用了 $r_u \cdot n_v = r_v \cdot n_u$ 这一关系式. 将(2)的两式作向量积可得

$$r_u \times r_v = (ac - b^2) n_u \times n_v. \quad (3)$$

由于 $n_u \times n_v = K r_u \times r_v$, 代入上式即得

$$ac - b^2 = \frac{1}{K}. \quad (4)$$

另外, 由(3)两边取模可得

$$|r_u \times r_v| = \frac{1}{K} |n_u \times n_v| = \frac{A}{K}. \quad (5)$$

公式(5)说明 S^2 上的面积元 $|n_u \times n_v| du dv$ 与 S 上的面积元 $|r_u \times$

之比恰为总曲率 K 。

设 S^* 是具有相同总曲率函数 $K(n)$ 的另外一个卵形面。由与单位球面 S^2 在 Gauss 映射下微分同胚, 所以我们可以建立 S^* 之间的一个微分同胚, 使它们在对对应点有相同的法方向, 对应点有相同的参数 (u, v) 值。我们把 S^* 上的函数与向量用的函数与向量的记号加上 * 来表示, 从而 $K = K^*$ 。因此

(4) 式便有

$$ac - b^2 = a^*c^* - b^{*2},$$

式也就给出

$$|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0^*| = |\mathbf{r}_0^* \times \mathbf{r}_0^*|.$$

点 O 到 S 与 S^* 对应点切平面的距离分别为 p 与 p^* , 则我

$$p = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}, \quad p^* = \mathbf{r}^* \cdot \mathbf{n}^*. \quad (6)$$

考察 S^2 上整体有定义的一次微分形式

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, d\mathbf{r}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{r}^*) \cdot d\mathbf{r},$$

都坐标 (u, v) 之下它有表达式

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_u) du + (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_v) dv.$$

S^2 上的任一单连通域 $\mathcal{D}$, 如记它在 (u, v) 平面上对应域为

则由 Green 公式, 我们有

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_u) du + (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_v) dv = - \iint_{\mathcal{D}} [(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_{uu}) - (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_{vv})] du dv. \quad (7)$$

要计算, 我们可得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_{uu}) - (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_{vv}) \\ &= (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_u) + (\mathbf{r}, \mathbf{r}_u^*, \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_u) - (\mathbf{r}, \mathbf{r}_v^*, \mathbf{r}_u) \\ &= -2(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v, \mathbf{r}^* + \mathbf{r}) \cdot [(\mathbf{r}_u^* \mathbf{n}_u + \mathbf{b}^* \mathbf{n}_v) \times (\mathbf{b} \mathbf{n}_u + c \mathbf{n}_v)] \end{aligned}$$

$$-\mathbf{r} \cdot [(\mathbf{b}^* \mathbf{n}_u + c^* \mathbf{n}_v) \times (a \mathbf{n}_u + b \mathbf{n}_v)]$$

$$= -2(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}^* + (a^*c - b^*b - b^*c + c^*a)(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) \cdot \mathbf{r}.$$

注意到 (3)、(6) 以及 $\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = |\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v| \mathbf{n}$, 上式改写为

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_0)_u - (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_0)_v \\ &= -\{2(ac - b^2)p^* + (2b^*b - a^*c - c^*a)p\} |\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v| \\ &= -\left\{2(ac - b^2)(p^* - p) + \left| \frac{a - a^*}{b - b^*} \frac{b - b^*}{c - c^*} \right| p\right\} |\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v|. \end{aligned}$$

由此式, 积分公式 (7) 就写成

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}^*) \cdot d\mathbf{r} = - \iint_{\mathcal{D}} \left\{ 2(ac - b^2)(p^* - p) + \left| \frac{a - a^*}{b - b^*} \frac{b - b^*}{c - c^*} \right| p \right\} d\sigma, \quad (8)$$

这里 $d\sigma = |\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v| du dv$ 是球面 S^2 上的面积元。由于 (8) 式是对 S^2 上任何单连通区域 $\mathcal{D}$ 都成立的, 扩张 $\mathcal{D}$, 使 $\partial \mathcal{D}$ 收缩到一点, 于是 (8) 最终化为

$$\iint_{S^2} \left\{ 2(ac - b^2)(p^* - p) + \left| \frac{a - a^*}{b - b^*} \frac{b - b^*}{c - c^*} \right| p \right\} d\sigma = 0. \quad (9)$$

在继续定理证明之前, 我们先来说明一个代数上的结论: 设

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ b^* & c^* \end{pmatrix} \text{ 是满足 } ac - b^2 = a^*c^* - b^{*2} \text{ 的两个正定阵, 则} \quad (10)$$

$$\left| \frac{a - a^*}{b - b^*} \frac{b - b^*}{c - c^*} \right| \leq 0,$$

且等号成立的充要条件是 $a = a^*, b = b^*, c = c^*$ 。

事实上, 如果我们把这两个方阵看成两个二次型的系数阵的话, 那么这个代数结论的条件与结果在二次型变量的满秩线性变换之下都是不变的。所以我们可在适当选择的变量之下进行论证。由于它们的系数阵均正定, 所以可选择适当变量, 使它们同时

为对角阵,也就是 $b=b^*=0$. 于是

$$\begin{vmatrix} a-a^* & b-b^* \\ b-b^* & c-c^* \end{vmatrix} = (a-a^*)(c-c^*) = -\frac{c}{a^*}(a-a^*)^2 \leq 0,$$

里已利用了条件 $ac=a^*c^*$ 以及方阵的正定性. 等号成立与反过的情形是明显的. 由以上说明还可见,若两个方阵均为负定阵,上述的结论仍然成立.

现在回到 Minkowski 定理的证明. 我们不妨假定,原点 O 取曲面 S 与 S^* 的内部(必要的话可通过平移曲面达到目的). 这 O 到 S 与 S^* 对应点切平面的距离就满足

$$p>0, \quad p^*>0.$$

用刚才叙述的代数结论,由(9)便得到

$$\iint_{S^*} (ac-b^2)(p^*-p)d\sigma \geq 0.$$

我们交换 S 与 S^* 的地位,同上讨论,亦能得到

$$\iint_{S^*} (ac-b^2)(p-p^*)d\sigma \geq 0.$$

将所得的两个积分不等式,只能有

$$\iint_{S^*} (ac-b^2)(p^*-p)d\sigma = 0.$$

由(9),我们有

$$\iint_{S^*} \begin{vmatrix} a-a^* & b-b^* \\ b-b^* & c-c^* \end{vmatrix} p d\sigma = 0,$$

利用(10)知,这只有在

$$\begin{vmatrix} a-a^* & b-b^* \\ b-b^* & c-c^* \end{vmatrix} = 0,$$

就是 $a=a^*, b=b^*, c=c^*$ 时才可能. 注意到(2),这也就是说有 $r=r^*, r_0=r_0^*$. 因此, S 与 S^* 只相差一个平移. 证毕.

当 S 是卵形面时,它的总曲率 $K(n)>0$,所以 S 在每点的两个主曲率同号,若取 S 的外法向为正定向,则 S 的平均曲率函数 $H(n)<0$. 由 Hadamard 定理, Gauss 映射 $N: S \rightarrow S^2$ 是一个微分同胚. 由黎曼面的单值化定理知道, S 与单位球面 S^2 是保角微分同胚的,所以 $\mathbb{E}^3$ 内任何两个卵形面都是保角微分同胚的. 如果在这个保角微分同胚下,两个曲面上对应点的单位外法向量保持相同方向,则我们称它为保持单位外法向量的保角微分同胚.

下例中,我们要证明一个有趣的结果.

例 100 在 $\mathbb{E}^3$ 内保持单位外法向量 n 的保角微分同胚卵形面类中,平均曲率函数 $H(n)$ 在仅相差一个平移的范围内可决定曲面.

证明 设 (u, v) 是单位球面 S^2 上的局部等温坐标, n 是 $\mathbb{E}^3$ 内卵形面 S 的单位外法向量场, r 是曲面 S 的位置向量场. 曲面 S 的第一基本形式系数用 E, F, G 表示,第二基本形式系数用 L, M, N 表示, H 表示曲面 S 的平均曲率, K 则表示它的总曲率. 如同例 99,我们有

$$n_u \cdot n_u = n_v \cdot n_v = A > 0,$$

$$n_u \cdot n_v = 0.$$

$$-r_u = \frac{L}{A} n_u + \frac{M}{A} n_v,$$

$$-r_v = \frac{M}{A} n_u + \frac{N}{A} n_v.$$

$$r_u \times r_v = \frac{LN-M^2}{A^2} n_u \times n_v, \quad (1)$$

$$r_u \times r_v = \sqrt{EG-F^2} n.$$

$$n_u \times n_v = An, \quad A \sqrt{EG-F^2} = LN-M^2,$$

$$\frac{1}{K} = \frac{EG-F^2}{LN-M^2} = \frac{LN-M^2}{A^2}.$$

面 S 的第一基本形式系数

$$E = r_u \cdot r_u = \frac{1}{A} (L^2 + M^2), \quad (2)$$

$$F = r_u \cdot r_v = \frac{M}{A} (L + N),$$

$$G = r_v \cdot r_v = \frac{1}{A} (M^2 + N^2). \quad (3)$$

面 S 的平均曲率函数

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{A(L + N)}{2(LN - M^2)}.$$

由于 $K > 0$, 则 $LN - M^2 > 0$; 由于 $H < 0$, 则 $L + N < 0$.

如果卵形面 S^* 和卵形面 S 之间有一个保持单位外法向量 n 的(保角)微分同胚, 而且具有一个平均曲率函数 $H(n)$, 那么参数 (u, v) 也可作为曲面 S^* 在对应点的坐标参数, n 也是曲面 S^* 在对应点的单位外法向量, 对于曲面 S^* 的对应点的相应函数和向量, 我们用相同的记号加上星号表示. 因为 $H = H^*$, 则有

$$\frac{L^* + N^*}{L^* N^* - M^{*2}} = \frac{L + N}{LN - M^2}. \quad (4)$$

$$L^* N^* - M^{*2} = \lambda (LN - M^2), \quad (5)$$

$$L^* + N^* = \lambda (L + N). \quad (6)$$

$$\frac{1}{K^*} = \frac{L^* N^* - M^{*2}}{A^2} = \frac{\lambda (LN - M^2)}{A^2} = \frac{\lambda}{K}. \quad (7)$$

因而利用(1), 我们有

因此 λ 是单位球面 S^2 上的一个函数, 与参数选择是无关的. 利用

$$\sqrt{E^* G^* - F^{*2}} = \frac{L^* N^* - M^{*2}}{A} = \frac{\lambda (LN - M^2)}{A}$$

由于曲面 S 和 S^* 具有相同的平均曲率函数

从(8)和(9)可得

令 $\lambda = e^{\rho}$, 我们知道(参看附注)

这里的 Δ_S 是卵形面 S 上的面积元素, $K^* \lambda = K^* e^{\rho}$. 因此, 在卵形面 S^* 上的函数

$$\Delta_{S^*} \rho = 0.$$

于是, ρ 必为常数, 即 λ 是正常数.

类似于(1), 我们有

$$-r_u^* \times r_v^* = \frac{L^*}{A} n_u + \frac{M^*}{A} n_v, \quad (8)$$

$$-r_v^* \times r_u^* = \frac{M^*}{A} n_u + \frac{N^*}{A} n_v. \quad (9)$$

于是,

$$r_u \times r_v^* = \frac{1}{A} (LN^* + MM^*) n, \quad (14)$$

$$r_v \times r_u^* = \frac{1}{A} (L^* N - MM^*) n. \quad (15)$$

令

$$p = r \cdot n, \quad p^* = r^* \cdot n.$$

我们可假设原点在曲面 S 和 S^* 的内部, 必要时可经过平移曲面来办到这一点, 于是 $p > 0, p^* > 0$.

利用(14)和(15), 通过直接计算我们有

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_u)_o - (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_v)_u \\
&= \frac{1}{A} [2(LN - M^2)p^* + (2MM^* - LN^* - L^*N)p]. \quad (16)
\end{aligned}$$

利用(5), 直接计算可得

$$\begin{aligned}
2MM^* - LN^* - L^*N &= \frac{1}{\lambda} [(\lambda L - L^*)(\lambda N - N^*) - (\lambda M - M^*)^2] \\
&- (\lambda + 1)(LN - M^2). \quad (17)
\end{aligned}$$

利用(6), 显然有

$$(\lambda L - L^*)(\lambda N - N^*) = -(\lambda L - L^*)^2. \quad (18)$$

将(17)、(18)代入(16), 我们可以看到

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_u)_o - (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_v)_u \\
&\leq \frac{1}{A} (LN - M^2) [2p^* - (\lambda + 1)p]. \quad (19)
\end{aligned}$$

完全类似于例 99, 我们知道

$$\iint_{S^1} [(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_u)_o - (\mathbf{r}, \mathbf{r}^*, \mathbf{r}_v)_u] \frac{1}{A} d\sigma = 0, \quad (20)$$

这里的 $\sigma = A \, d\omega \, dv$ 是 S^2 的面积元素. 在 S^2 上积分(19), 再利用(20)和(1)中的最后一个公式, 我们有

$$\begin{aligned}
\iint_{S^1} \frac{p^*}{K} d\sigma &\geq \frac{1}{2} (\lambda + 1) \iint_{S^1} \frac{p}{K} d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \iint_{S^1} \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K^*} \right) p \, d\sigma. \quad (21)
\end{aligned}$$

若我们交换 S 与 S^* 的地位, 则类似可得

$$\begin{aligned}
\iint_{S^1} \frac{p}{K^*} d\sigma &\geq \frac{1}{2} \iint_{S^1} \left(\frac{1}{K^*} + \frac{1}{K} \right) p^* d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \iint_{S^1} \frac{p^*}{K^*} d\sigma. \quad (22)
\end{aligned}$$

利用 $K = \lambda K^*$, (21)和(22), 我们有

$$\begin{aligned}
\iint_{S^1} \frac{p^*}{K} d\sigma &\geq \frac{1}{2} (\lambda + 1) \iint_{S^1} \frac{p}{K} d\sigma \\
&\geq \frac{1}{4} (\lambda + 1) \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \iint_{S^1} \frac{p^*}{K} d\sigma.
\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\frac{1}{4} \left(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 \iint_{S^1} \frac{p^*}{K} d\sigma \leq 0,$$

这便导致 $\lambda = 1$, $K = K^*$. 由上例的 Minkowski 定理, 两卵形面 S 和 S^* 由平移可迭合. 证毕.