

西北师范大学 数信学院 数学与应用数学专业

《微分几何》 考试题 (A) (2007/07)

班级: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 成绩: \_\_\_\_\_

一、填空题 (每空 1 分, 共 20 分)

1. 直线的特征是\_\_\_\_\_, 平面曲线的特征是\_\_\_\_\_.
2. 半径为  $R$  的圆的曲率为\_\_\_\_\_, 半径为  $R$  的球面的法曲率为\_\_\_\_\_.
3. 曲面是球面(或球面的一部分)的充要条件是\_\_\_\_\_, 曲面是平面(或平面的一部分)的充要条件是\_\_\_\_\_.
4. 根据曲线论的基本定理, 唯一决定一条空间曲线的两个运动不变量是\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_.
5. 曲面的坐标曲线网正交的充要条件是\_\_\_\_\_, 坐标曲线网成为曲率线网的充要条件是\_\_\_\_\_.
6. 圆的自然方程是\_\_\_\_\_, 圆柱螺线的自然方程是\_\_\_\_\_.
7. 平面曲线  $y = -x^2$  在点  $(0,0)$  处的相对曲率  $k_r =$ \_\_\_\_\_, 绝对曲率  $k =$ \_\_\_\_\_.
8. 可展曲面的 Gauss 曲率  $K =$ \_\_\_\_\_, 极小曲面的平均曲率  $H =$ \_\_\_\_\_.
9. 在脐点处曲面的第一, 第二类基本量满足\_\_\_\_\_, 把第二类基本量  $L=M=N=0$  的点称为\_\_\_\_\_.
10. 法曲率的最大值和最小值正好是\_\_\_\_\_, 使法曲率达到最大值和最小值的方向是\_\_\_\_\_方向.

二、选择题 (每题 2 分, 共 30 分)

1. 下面各量中, 不是内蕴量的是 ( )  
A. 曲面上曲线的曲率      B. 曲面域的面积  
C. 曲线的弧长              D. 高斯曲率

2. 关于直纹面与可展曲面不正确的说法是 ( )
- A. 直纹面一定是可展曲面  
 B. 可展曲面一定是直纹面  
 C. 可展曲面只有三种, 即柱面, 锥面和空间曲线的切线面  
 D. 平面既是直纹面又是可展曲面
3. 下面说法不正确的是 ( )
- A. 等距变换一定是保角变换      B. 保角变换一定是等距变换  
 C. 平面与圆柱面成等距对应      D. 平面与除去北极外的球面成保角对应
4. 平面曲线的密切平面与曲线所在平面 ( )
- A. 相交    B. 平行    C. 重合    D. 垂直
5. 关于球面下列说法不正确的是 ( )
- A. 球面是全脐点曲面      B. 球面上任意曲线都为曲率线  
 C. 球面的高斯曲率是正常数      D. 球面是可展曲面
6. 两个曲面等距等价的充要条件是经过适当的参数选择后, ( )
- A. 第一基本型相同      B. 第一基本型成比例  
 C. 第二基本型相同      D. 第二基本型成比例
7. 设曲线  $(C)$  是曲面  $S$  上的一条渐近线, 则沿  $(C)$ ,  $S$  的单位法向量与曲线  $(C)$  的基本向量之间的关系是 ( )
- A.  $\vec{n} // \vec{T}$       B.  $\vec{n} // \vec{B}$       C.  $\vec{n} // \vec{N}$       D.  $\vec{n} \perp \vec{B}$
8. 在选取曲率线网作为参数曲线网时, 曲面的两个主曲率  $k_1$  和  $k_2$  为 ( )
- A.  $k_1 = \frac{E}{L}, k_2 = \frac{G}{N}$       B.  $k_1 = \frac{L}{E}, k_2 = \frac{N}{G}$   
 C.  $k_1 = \frac{G}{L}, k_2 = \frac{E}{N}$       D.  $k_1 = \frac{L}{G}, k_2 = \frac{N}{E}$

9. 设曲面  $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in D$  的第一、二类基本量为  $E, F, G$  和  $L, M, N$ , 则曲面  $S$  的面积为 ( )
- A.  $\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$       B.  $\sigma = \iint_D \sqrt{LN - M^2} dudv$   
 C.  $\sigma = \iint_D (EG - F^2) dudv$       D.  $\sigma = \iint_D (LN - M^2) dudv$
10. 下列曲面中能建立等距对应的是 ( )
- A. 球面与柱面      B. 球面与平面  
 C. 平面与可展曲面      D. 球面与可展曲面
11. 下面曲线中是一般螺线的是 ( )
- A. 平面曲线      B. 圆柱螺线      C. 直线      D. 以上全是
12. 根据 Meusnier 定理, 同一曲面上两条曲线  $(C)$  和  $(C^*)$  在某点相切, 则它们在这点的法曲率  $k_n$  和  $k_n^*$  满足 ( )
- A.  $k_n = k_n^*$       B.  $k_n = -k_n^*$       C.  $k_n \cdot k_n^* = 1$       D.  $k_n \cdot k_n^* = -1$
13. 曲面  $z = axy$  上, 坐标曲线  $x = x_0$  和  $y = y_0$  之间的交角为 ( )
- A.  $\arccos \frac{2a^2 x_0 y_0}{\sqrt{1+a^2 x_0^2} \sqrt{1+a^2 y_0^2}}$       B.  $\arcsin \frac{2a^2 x_0 y_0}{\sqrt{1+a^2 x_0^2} \sqrt{1+a^2 y_0^2}}$   
 C.  $\frac{\pi}{2}$       D. 0
14. 单参数平面族  $t^2 x + 2ty + 2z = 2t$ ,  $t$  为参数, 的包络曲面方程为 ( )
- A.  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$       B.  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$   
 C.  $(y-1)^2 = 2xz$       D.  $(x-1)^2 = 2yz$
15. 下列直纹曲面中, 不是可展曲面的是 ( )

- A. 柱面    B. 锥面    C. 挠曲线的切线面    D. 挠曲线的主法线曲面

三、(本题满分 18 分, 第 1 题 12 分, 第 2 题 6 分)

1. 已知参数曲线  $r = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$ ,  $t$  为参数,  $a, b$  为非零常数, 且  $a^2 + b^2 \neq 1$ ,

(1) 参数  $t$  是否为弧长参数, 为什么?

(2) 求基本向量  $\alpha, \beta, \gamma$  及曲率和挠率.

2. 证明: 如果曲线的所有切线都经过一定点, 则此曲线为直线.

四、(本题满分 16 分) 已知正螺面的参数方程  $r(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, bv\}$ ,

(1) 求主曲率.

(2) 求高斯曲率  $K$  和平均曲率  $H$ .

(3) 正螺面是否为可展曲面或极小曲面, 说明理由.

(4) 求正螺面上的渐近曲线.

五、(本题满分 12 分) 证明: 曲面上的曲线是曲率线的充分必要条件是沿此曲线的曲面的法线组成一可展曲面.

六、(本题满分 4 分) 证明: 极小曲面上的点都是双曲点或平点.