

西北师范大学 数信学院 数学与应用数学专业

## 《微分几何》 考试题 (A) (2005/07)

班级: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 成绩: \_\_\_\_\_

### 一. 填空题 (每空 2 分, 共 40 分)

1. 曲率恒为零的曲线是\_\_\_\_\_；挠率恒为零的曲线是\_\_\_\_\_.
2. 圆柱螺线  $r(t) = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$  (其中  $a, b$  为正常数,  $t$  为参数) 的自然参数方程是\_\_\_\_\_；自然方程是\_\_\_\_\_.
3. 平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的高斯曲率为\_\_\_\_\_；平均曲率为\_\_\_\_\_.
4. 曲面的参数曲线网正交的充要条件是\_\_\_\_\_；参数曲线网成为曲率线网的充要条件是\_\_\_\_\_.
5. 法曲率的最大值和最小值正好是曲面的\_\_\_\_\_曲率；使法曲率达到最大值和最小值的方向是曲面的\_\_\_\_\_方向.
6. 根据曲线论的基本定理, 在可以相差一个空间位置的情况下, 唯一决定一条空间曲线的两个运动不变量是曲线的\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_.
7. 平面曲线相对曲率的几何意义是同时反映曲线的\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_.
8. 脐点处, 曲面的第一、二类基本量  $E, F, G; L, M, N$  满足关系式\_\_\_\_\_；  
 $LN - M^2 > 0$  的点称为\_\_\_\_\_点.
9. 平面、柱面和去掉一点的球面三者中, 能建立等距对应的一对曲面是\_\_\_\_\_；  
能建立共形对应的一对曲面是\_\_\_\_\_.
10. 距离单位球面球心距离为  $d(0 < d < 1)$  的平面与球面的交线的法曲率为\_\_\_\_\_,  
曲率为\_\_\_\_\_.

### 二. 单项选择题 (每题 2 分, 共 10 分)

1. 反映法曲率随方向而变化的变化规律的欧拉 (Euler) 公式是 【    】

A.  $k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$                       B.  $k_n^2 = k_1^2 \cos^2 \theta + k_2^2 \sin^2 \theta$

C.  $k_n = k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta$                       D.  $k_n = k_1^2 \cos^2 \theta + k_2^2 \sin^2 \theta$

2. 面关于曲面上主方向的说法, **不正确**的一项是 【    】

- A. 脐点处, 任何方向都是主方向              B. 非脐点处, 主方向垂直  
C. 脐点处, 无主方向                          D. 非脐点处, 有且仅有两个主方向

3. 等距等价的两个曲面, 经过适当的参数选择后, 两个曲面的 【    】

- A. 第一基本型成比例    B. 第一基本型相同  
C. 第二基本型成比例    D. 第二基本型相同

4. 下列曲面是可展曲面的是 【    】

- A. 圆柱螺线的切线曲面                      B. 圆柱螺线的主法线曲面  
C. 圆柱螺线的副法线曲面                      D. 参数曲面  $r(u, v) = \{v \cos u, v \sin u, au + b\}$

5. 过空间曲线  $C$  上点  $P$  (非逗留点) 的切线和  $P$  点的邻近点  $Q$  的平面  $\pi$ , 当  $Q$  沿曲线  $C$  趋于点  $P$  时, 平面  $\pi$  的极限位置称为曲线  $C$  在  $P$  点的 【    】

- A. 法平面              B. 密切平面              C. 从切平面              D. 不存在

### 三、计算题 (每小题 10 分, 共 20 分)

- 求参数曲线  $r(t) = \{\cos t, \sin t, e^t\}$  在参数  $t = 0$  的点处的曲率和挠率.
- 求参数曲面  $r(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, bv\}$  (其中  $b$  为常数) 的主曲率和高斯曲率.

### 四、证明题 (每小题 10 分, 共 30 分)

- 证明: 圆柱面  $r(u, v) = \{\cos u, \sin u, v\}$  是常平均曲率曲面.
- 设  $C$  是曲面  $S$  上一条曲率线, 若沿着  $C$ , 曲面  $S$  的切平面与曲线  $C$  的密切平面恒成定角  $\theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \pi$ ), 证明:  $C$  是平面曲线.
- 证明: 极小曲面上的点都是双曲点或平点.