

西北师范大学 数信学院 数学与应用数学专业

《微分几何》 考试题 (A) (2004/07)

班级: _____ 学号: _____ 姓名: _____ 成绩: _____

一、填空题 (每空 1 分, 共 20 分)

1. 圆柱螺线 $\mathbf{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$ 的自然方程是 _____;
自然参数方程是 _____.
2. 称曲率和挠率是曲线的两个不变量, 是指曲率和挠率在 _____ 变换和 _____ 变换下是不变的.
3. 就平面曲线而言, 相对曲率的几何意义是它不但反映曲线的 _____, 同时也反映曲线的 _____.
4. 圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 的高斯曲率为 _____;
平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的平均曲率为 _____.
5. 全脐点曲面只有两种, 它们是 _____ 和 _____.
6. 到单位球面球心距离为 $d(0 < d < 1)$ 的平面和球面的交线的曲率为 _____;
法曲率为 _____.
7. 曲面在一点处, 沿所有方向的法曲率的最大值或最小值是曲面的 _____ 曲率;
使法曲率达到最值的方向是曲面的 _____ 方向.
8. 具有第一基本型为 $I = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ 的曲面上, 两条相交的坐标曲线的交角为 _____; 该曲面上两条曲线 $u + v = 0$ 和 $u - v = 0$ 的交角余弦为 _____.
9. 曲面上第一、第二类基本量满足 _____ 的点称为脐点; 第二类基本量恒为零的点称为 _____ 点.
10. 在等距等价的意义下, 局部地, 可展曲面只有三种, 它们是锥面、 _____ 和 _____.

二、单项选择题（每题 2 分，共 20 分）

1. 曲面的下列各量中，属内蕴量的是 【 】
 A. 法曲率 B. 主曲率 C. 高斯曲率 D. 平均曲率
2. 曲率和挠率均为非零常数的曲线是 【 】
 A. 直线 B. 圆 C. 圆柱螺线 D. 平面曲线
3. 过空间曲线 C 上点 P （非逗留点）的切线和 P 点的邻近点 Q 的平面 π ，当 Q 沿曲线 C 趋于点 P 时，平面 π 的极限位置称为曲线在 P 点的 【 】
 A. 密切平面 B. 从切平面 C. 法平面 D. 不存在
4. 曲面上两条曲线 C 和 C^* 相切于 P 点，则在 P 点， C 和 C^* 的法曲率 k_n 和 k_n^* 满足关系式 【 】
 A. $k_n > k_n^*$ B. $k_n < k_n^*$ C. $k_n = k_n^*$ D. $k_n = -k_n^*$
5. 两个曲面等距等价的充要条件是：经过适当的参数选择后，两曲面 【 】
 A. 第一基本型成比例 B. 第一基本型相同
 C. 第二基本型成比例 D. 第二基本型相同
6. 在椭圆点处，曲面的第二类基本量满足 【 】
 A. $LN - M^2 > 0$ B. $LN - M^2 < 0$ C. $LN - M^2 = 0$ D. 以上都不对
7. 沿渐近曲线，曲面的切平面与该渐近曲线的密切平面 【 】
 A. 斜交 B. 直交 C. 重合 D. 位置关系不确定
8. 在不含脐点的曲面上，坐标曲线网成为曲率线网的充要条件是 【 】
 A. $F = 0$ B. $F = M = 0$ C. $L = N = 0$ D. $M = 0$
9. 下列各对曲面之间可建立（局部）等距对应的是 【 】
 A. 柱面与球面 B. 球面与平面
 C. 平面与可展曲面 D. 可展曲面与直纹曲面
10. 抛物线 $y = x^2$ 在原点处的曲率半径为 【 】

- A. 2 B. $1/2$ C. $\sqrt{2}$ D. $1/\sqrt{2}$

三、计算题（每题 10 分，共 20 分）

1. 求参数曲线 $\mathbf{r}(t) = \{\cos t, \sin t, t\}$ 的基本向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 及曲率和挠率（这里参数 t 满足 $0 < t < 1/2$ ）。

2. 设 S 是由空间曲线 $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ （ s 为弧长参数）的主法线组成的曲面，写出 S 的参数方程，并求 S 沿曲线 C 的高斯曲率。

四、证明题（每题 10 分，共 40 分）

1. 证明正螺面 $\mathbf{r}(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, bv\}$ 是极小曲面.
2. 证明：若曲面上存在一条直线，则该曲面与球面之间不存在等距对应.
3. 如果一条曲线的所有法平面包含（非零）常向量 \mathbf{e} ，证明：该曲线是直线或平面曲线.
4. 证明：可展曲面的高斯曲率恒为零.