

西北师范大学 数信学院 数学与应用数学专业
《微分几何》 考试题 (A) (2003/07)

班级: _____ 学号: _____ 姓名: _____ 成绩: _____

一、 填空题 (每空 1 分, 共 16 分)

1. 圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 的高斯曲率为 _____;
平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的平均曲率为 _____.
2. 法曲率的最大值和最小值正好是曲面的 _____ 曲率, 使法曲率达到最大值和最小值的方向是曲面的 _____ 方向.
3. 距离单位球面球心距离为 $d(0 < d < 1)$ 的平面与球面的交线的法曲率为 _____,
测地曲率为 _____.
4. 曲面的坐标曲线网正交的充要条件是 _____, 坐标曲线网成为曲率线网的充要条件是 _____.
5. 具有第一基本型为 $I = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ 的曲面上, 两条相交的坐标曲线的交角为 _____;
该曲面上两条曲线 $u + v = 0$ 和 $u - v = 0$ 的交角余弦为 _____.
6. 是否存在曲面分别以 $(du^2 - dv^2)$ 和 $2dudv$ 作为它的第一、第二基本型? _____,
简述理由 _____.
7. 根据曲线论的基本定理, 在可以相差一个空间位置的情况下, 唯一决定一条空间曲线的两个不变量是曲线的 _____ 和 _____.
8. 脐点处, 曲面的第一、第二类基本量满足关系 _____, 脐点的等距微分同胚像仍是脐点吗? _____.

二、 单项选择题 (每题 2 分, 共 16 分)

1. 下面各量中, 不是内蕴量的是 【 】
A. 曲面上曲线的曲率 B. 曲面上曲线的法曲率
C. 曲面的平均曲率 D. 曲面的高斯曲率

2. 下面各对曲面中, 能建立局部等距对应的是 【 】
- A. 球面与柱面 B. 柱面与平面
- C. 平面与伪球面 D. 伪球面与可展曲面
3. 下列曲面不是可展曲面的是 【 】
- A. $\mathbf{r}(u, v) = \{v \cos u, v \sin u, au + b\}$ B. 高斯曲率恒为 0 的无平点曲面
- C. 曲线 $\mathbf{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$ 的切线曲面 D. 与平面等距等价的曲面
4. 设曲线 C 的曲率为 k , 挠率为 τ , 设 C^* 是 C 关于坐标原点的对称曲线, 其曲率和挠率分别记为 k^* 和 τ^* , 则 【 】
- A. $k = k^*, \tau = \tau^*$ B. $k = -k^*, \tau = \tau^*$
- C. $k = k^*, \tau = -\tau^*$ D. $k = -k^*, \tau = -\tau^*$
5. 设曲面的第一, 第二基本型分别是 $I = Edu^2 + Gdv^2, II = Ldu^2 + Ndv^2$, 则曲面的两个主曲率分别是 【 】
- A. $k_1 = \frac{L}{E}, k_2 = \frac{N}{G}$ B. $k_1 = \frac{E}{L}, k_2 = \frac{G}{N}$
- C. $k_1 = k_2 = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v}$ D. $k_1 = k_2 = \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u}$
6. 曲率和挠率均为非零常数的曲线是 【 】
- A. 直线 B. 圆 C. 圆柱螺线 D. 平面曲线
7. 过空间曲线 C 上点 P (非逗留点) 的切线和 P 点的邻近点 Q 的平面 π , 当 Q 沿曲线 C 趋于点 P 时, 平面 π 的极限位置称为曲线在 P 点的 【 】
- A. 密切平面 B. 从切平面 C. 法平面 D. 不存在
8. 沿渐近曲线, 曲面的切平面与该渐近曲线的密切平面 【 】
- A. 斜交 B. 直交 C. 重合 D. 位置关系不确定

三、多项选择题 (每题 4 分, 共 12 分)

1. 下面说法正确的是 【 】
- A. 欧氏合同的两曲面必等距等价 B. 等距等价的两曲面必欧氏合同
- C. 欧氏合同的两曲面具有相同的内蕴量和内蕴性质
- D. 等距等价的两曲面具有相同的内蕴量和内蕴性质
- E. 等距等价的两曲面在对应点具有相同高斯曲率, 反之亦成立
2. 下列关于特殊曲线的论断, 正确的是 【 】

- A. 若曲线上有无穷多个点处曲率为零, 则曲线必为直线
- B. 平面曲线的密切平面即曲线所在平面本身
- C. 法截线的曲率反映曲面沿法截线方向的弯曲程度
- D. 柱面螺线的特征是曲率和挠率成定比
- E. 曲面上若含有直线, 则直线同时是渐近曲线, 曲率线
3. 下列关于曲面的主方向和渐近方向, 正确的说法是 【 】
- A. 曲面上任一点处, 至少有两个主方向 B. 曲面上任一点处, 至多有两个渐近方向
- C. 除脐点处外, 主方向是正交的 D. 平面上任何方向既是主方向又是渐近方向
- E. 球面上任何方向既不是主方向又不是渐近方向

四、计算题（每题 10 分，共 20 分）

1. 求圆柱螺线 $\mathbf{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$ 的自然方程和自然参数方程.
2. 设 S 是由空间曲线 $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (s 为弧长参数) 的副法线组成的曲面, 写出 S 的参数方程, 并求 S 沿曲线 C 的高斯曲率.

1. 证明: 圆柱面 $r(u, v) = \{\cos u, \sin u, v\}$ 为常平均曲率曲面。
2. 设曲面 S 上一条曲率线 C (不含直线段) 在其每一点的密切平面与曲面 S 在同一点的切平面交于定角 $\theta_0 (0 < \theta_0 < \pi)$, 证明: 这条曲率线 C 必为平面曲线。
3. 证明: 极小曲面上的点都是双曲点或平点。
4. 证明: 若曲面上存在一条直线, 则该曲面与球面之间不存在等距对应。