4.6 常高斯曲率曲面

由著名的高斯定理, 曲面的高斯曲率 K 被其第一基本形式完全确定. 因此, 若两个曲面等距等价, 则对应点的高斯曲率必相等. 但反之则不然.

【例 1】 证明: 曲面

$$S : \boldsymbol{r} = \{u\cos v, u\sin v, \ln u\}, \quad (\text{旋转曲面})$$

$$S^* : \boldsymbol{r}^* = \{u^*\cos v^*, u^*\sin v^*, v^*\}, \quad (\text{正螺面})$$

在点 (u,v) 与 (u^*,v^*) 处的高斯曲率相等, 但曲面 S 与 S^* 不存在等距变换.

【证明】 容易算出旋转曲面 S 和正螺面 S^* 的第一基本形式分别为

$$I = \left(1+\frac{1}{u^2}\right)du^2 + u^2dv^2,$$

$$I^* = (du^*)^2 + (1+u^{*2})(dv^*)^2.$$

由正交网时高斯曲率的公式(即高斯方程)计算得出它们的高斯曲率分别为

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2}, \quad K^* = -\frac{1}{(1+u^{*2})^2}.$$

因此取对应点 $(u,v)\leftrightarrow(u^*,v^*)$, 便成立 $K=K^*$.

以下我们用反证法证明 S 与 S^* 之间不存在等距变换. 假设 $u^*=\phi(u,v)$, $v^*=\psi(u,v)$ 曲面 S 与 S^* 之间的等距变换, 则对应点的高斯曲率必相等, 即应成立 $K(u,v)=K^*(\phi(u,v),\psi(u,v))$, 即

$$(1+\phi^2(u,v))^2 = (1+u^2)^2, \quad 或 \quad 1+\phi^2(u,v) = \pm(1+u^2).$$

显然 $1+\phi^2(u,v) = -(1+u^2)$ 不可能. 剩下的情形是 $1+\phi^2(u,v) = 1+u^2$, 等价地 $u^*=\pm u$. 这时 S^* 的第一基本形式可以改写为

$$I^* = [1+(1+u^2)\psi_u^2]du^2 + 2(1+u^2)\psi_u\psi_v dudv + (1+u^2)\psi_v^2 dv^2.$$

因为是等距对应, 故 $I=I^*$, 比较得出

$$\begin{cases} 1+(1+u^2)\psi_u^2 = 1+\frac{1}{u^2}, \\ (1+u^2)\psi_u\psi_v = 0, \\ (1+u^2)\psi_v^2 = u^2, \end{cases}$$

由其中第二式得出 $\phi_u = 0$ 或 $\phi_v = 0$, 再由第一式或第三式得出 $u = \infty$ 或 $u = 0$, 这与条件不符. 综上讨论, 曲面 S 和 S^* 之间不能存在等距变换. □

尽管在对应点具有相同高斯曲率的曲面不能建立等距对应, 但是对高斯曲率为常数的曲面, 我们有如下定理.

定理 6.1 (Minding) 具有相同常数高斯曲率的曲面总是局部等距等价的.

证明 设曲面 S 的高斯曲率 K 是常数. 在曲面 S 上取半测地坐标系 (u, v), 因而它的第一基本形式为

$$I = du^2 + G(u, v)\, dv^2,$$

其中 $G(u, v)$ 满足条件

$$G(0, v) = 1, \quad G_u(0, v) = 0. \tag{6.1}$$

由于 $E = 1$, 根据高斯曲率的内蕴表达式, 我们有

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}, \quad 或 \quad \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + K\sqrt{G} = 0, \tag{6.2}$$

这是一个二阶常系数线性齐次微分方程, 并且满足初值条件 (6.1). 根据 K 的不同符号, 方程 (6.2) 的通解分别为

$$\begin{aligned}
K > 0, &\quad \sqrt{G} = f_1(v)\cos(\sqrt{K}u) + f_2(v)\sin(\sqrt{K}u), \\
K = 0, &\quad \sqrt{G} = f_1(v) + f_2(v)u, \\
K < 0, &\quad \sqrt{G} = f_1(v)\cosh(\sqrt{-K}u) + f_2(v)\sinh(\sqrt{-K}u).
\end{aligned}$$

这里 f_1, f_2 是 v 的任意函数, 利用初始条件 (6.1) 便得 $f_1(v) = 1, f_2(v) = 0$, 故方程 (6.2) 满足初始条件 (6.1) 的解为

$$\begin{aligned}
K > 0, &\quad \sqrt{G} = \cos(\sqrt{K}u), \\
K = 0, &\quad \sqrt{G} = 1, \\
K < 0, &\quad \sqrt{G} = \cosh(\sqrt{-K}u).
\end{aligned}$$

因此Gauss曲率为常数K的曲面的第一基本形式在半测地坐标系(u,v)下有完全确定的表达式, 根据其Gauss曲率K的符号的不同分别为

$$\begin{aligned}
&K>0, \quad I=du^2+\cos^2(\sqrt{K}u)\ dv^2,\\
&K=0, \quad I=du^2+dv^2,\\
&K<0, \quad I=du^2+\cosh^2(\sqrt{-K}u)\ dv^2.
\end{aligned}$$

由此可知, 具有相同常数高斯曲率的曲面都可适当选取参数, 使曲面具有相同的第一基本形式, 即局部等距等价. □

由上述定理知道, 具有常数高斯曲率的曲面(这种曲面称为**常曲率曲面**)可按$K>0,K=0,K<0$分成三种类型. 而属于同一类型的曲面它们的内在几何是相同的. 平面作为高斯曲率为零的代表; 球面作为高斯曲率为正常数的代表. 换句话说, 高斯曲率为零的曲面都可以与平面建立等距对应, 高斯曲率为正常数的曲面都可以与球面建立等距对应. 那么自然会问什么曲面可以作为高斯曲率为负常数的代表? 设$K=-\frac{1}{a^2}$, 我们可以在旋转曲面中找出这个代表.

设旋转曲面的待定母线为yOz平面中的曲线$z=f(y)$. 把它绕z-轴旋转后形成了旋转面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\{v\cos u, v\sin u, f(v)\},$$

其高斯曲率

$$K=\frac{f'f''}{v(1+(f')^2)^2},$$

为了使这个曲面的高斯曲率$K=-\frac{1}{a^2}$, 待定函数f就必须满足下列方程:

$$\frac{f'f''}{v(1+(f')^2)^2}=-\frac{1}{a^2},$$

将其改写成

$$\frac{f'd(f')}{(1+(f')^2)^2}=-\frac{1}{a^2}v\ dv$$

两边积分后得到

$$\frac{1}{1+(f')^2}=\frac{1}{a^2}v^2+C_1,$$

取积分常数 $C_1 = 0$, 于是可解出

$$f' = \pm\frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{v},$$

再积分, 就得出

$$f = \pm\int\frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{v}\,dv,$$

如令 $v = a\cos\phi$ 后

$$f = \pm a\int\frac{\sin^2\phi}{\cos\phi}\,d\phi = \pm a[\ln(\sec\phi + \tan\phi) - \sin\phi] + C_2$$

不妨再把积分常数 C_2 取为 0, 于是以母线

$$\begin{cases} y = a\cos\phi \\ z = \pm a[\ln(\sec\phi + \tan\phi) - \sin\phi] \end{cases} \tag{6.3}$$

绕 z-轴旋转后所得的旋转曲面的高斯曲率正好等于负常数 $-\frac{1}{a^2}$. 我们把母线 (6.3) 称为**曳物线**. 而把曳物线绕 z-轴旋转后所得的曲面称为**伪球面**.

【注 1】 我们之所以称曲线 (6.4) 为曳物线的原因如下: 过这条曲线上每点 P, 作切线与轴交于 Q, 可以验证: 线段 PQ 的长度为 a. 这就相当于人 Q 用一根长为 a 的直绳拖曳着物体沿 z-轴走动时, 物体 P 所走出的轨迹, 它正好就是曲线 (6.3), 因而我们就称曲线 (6.3) 为曳物线.

【注 2】 可以验证第一象限内曳物线与 y-正半轴, z-正半轴之间所夹部分的面积为 $\frac{1}{4}\pi a^2$, 这是半径为 a 的圆面积的 $\frac{1}{4}$. 该曳物线绕 z-轴旋转所得的曲面的表面积是 $2\pi a^2$, 这恰等于半径为 a 的球面的表面积的 $\frac{1}{2}$, 这曲面所围的体积是 $\frac{1}{3}\pi a^3$, 恰为半径为的球体积的 $\frac{1}{4}$.

习题 4–6

1. 已知常曲率曲面的第一基本形式是

$$I = \begin{cases} du^2 + \frac{1}{k}\sin^2(\sqrt{k}u)dv^2, & k > 0 \\ du^2 - \frac{1}{k}\sinh^2(\sqrt{-k}u)dv^2, & k < 0 \end{cases}$$

证明: 该曲面上的测地线可以分别表示为

$$A\sin(\sqrt{k}u)\cos v + B\sin(\sqrt{k}u)\sin v + C\cos(\sqrt{k}u) = 0,$$

或

$$A\sinh(\sqrt{-k}u)\cos v + B\sinh(\sqrt{-k}u)\sin v + C\cos(\sqrt{-k}u) = 0,$$

其中A, B, C是不全为零的常数.

2. 证明: 在常曲率曲面上, 测地圆有常测地曲率.

3. 设常曲率曲面S的线素为$ds^2 = du^2 + c^2 e^{\frac{2u}{a}} dv^2$, 曲面$\bar{S}$: $\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} - a\boldsymbol{r}_1$. 证明: S与$\bar{S}$有相同的Gauss曲率, 但对应点的切平面互相正交.