4.5 Gauss-Bonnet 公式

Gauss-Bonnet 定理也许是曲面微分几何中最深刻的定理. 此定理的最初形式是由 Gauss 在一篇著名的讨论曲面上测地三角形(即其三边均为测地弧的曲边三角形)的文章中叙述过. 大体上说, 一个测地三角形 Δ 的三个内角 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 之和超过 π 的部分等于 Gauss 曲率 K 在 Δ 上的积分, 也就是说

$$\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\alpha}_i - \pi = \iint_{\Delta} K dA. \tag{5.1}$$

例如当 $K \equiv 0$ 时, 由 (5.1) 式有 $\sum\limits_{i=1}^{3} \boldsymbol{\alpha}_i = \pi$. 即 (5.1) 式是平面几何中的 Thales 定理在曲面上的推广. 在单位球面上, $K \equiv 1$, 则有 $\sum\limits_{i=1}^{3} \boldsymbol{\alpha}_i - \pi = \Delta$ 的面积, 由此可见, 测地三角形的内角和大于 π, 并且超过 π 的部分正好是三角形区域的面积. 类似地, 在伪球面($K \equiv -1$)上, 任何测地三角形的内角和小于 π.

O. Bonnet 在 1848 年把 Gauss 的上述结论推广到由一条非测地的简单光滑闭曲线所围成的区域, 进而推广到简单分段光滑闭曲线的情形, 得到了 Gauss-Bonnet 公式.

A 单连通区域上的 Gauss-Bonnet 公式

设曲线 C 是曲面 S 上的一条简单光滑闭曲线, 它所包围的区域 $\mathcal{D}$ 是一个单连通区域(即 $\mathcal{D}$ 内任何闭曲线都可在 $\mathcal{D}$ 内收缩为一点). 而 D 是 $\mathcal{D}$ 对应的 (u, v) 平面上的区域, 记平面区域 D 的边界为闭曲线 ∂D. 我们选取曲面上正交曲线网作为参数曲线网 (u, v).

设曲线 C 的参数方程是 $u = u(s), v = v(s)$, 其中 s 为弧长参数, $\theta(s)$ 是曲线 C 的切向量与 u-曲线的正向夹角, 可以选取 $\theta(s)$ 是 s 的可微函数. 于是, 将正交网时计算测地曲率的 Liouville 公式两边绕曲线 C 积分一周, 得

$$\oint_C k_g \, ds = \oint_C d\theta + \oint_C \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-E_v du + G_u dv). \tag{5.2}$$

现在我们先考察 (5.2) 式右端的第二个积分. 利用微分学中的 Gauss-

Green 公式, 并结合正交网时高斯曲率的计算公式, 我们作如下计算:

$$\begin{aligned}
&\oint_C \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-E_v du + G_u dv) = \oint_{\partial D} \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-E_v du + G_u dv) \\
&= \iint_D \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv \quad (\text{由 Green 公式}) \\
&= \iint_D \left\{ \left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right]_v + \left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right]_u \right\} dudv \\
&= -\iint_D K\sqrt{EG}\, dudv = -\iint_{\mathcal{D}} K\ dA, \quad (\text{由 Gauss 公式})
\end{aligned}$$

其中 $dA = \sqrt{EG}\ dudv$ 是曲面 S 在正交参数网下的面积元素.

再来考察 (5.2) 式中积分 $\oint_C d\theta$. 为此, 我们在曲面 S 上取等温参数, 则 S 的第一基本形式为 $I = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2)$. 另外, 取一平面 π 上的直角坐标系 (u^*, v^*), 其第一基本形式为 $I^* = (du^*)^2 + (dv^*)^2$. 令 $u = u^*, v = v^*$, 这个对应就是曲面 S 和平面 π 之间的共形变换. 这时 S 上的 u-线对应 π 上的 u^*-线. 假设 S 上的曲线 C 在上述共形变换下对应于平面 π 上的曲线 C^*, C^* 与平面 π 上的 u^*-线之间的夹角记为 θ^*. 由共形变换的定义有 $\theta = \theta^*$. 于是

$$\oint_C d\theta = \oint_{C^*} d\theta^*.$$

但是在平面 π 上, 根据**切线回转定理**: 沿单连通区域的边界曲线的正向绕一周后, 边界曲线的切向量转过了 2π 角度, 即成立 $\oint_{C^*} d\theta^* = 2\pi$. 因此 (5.2) 式就化为

$$\oint_C k_g\ ds + \iint_{\mathcal{D}} K\ dA = 2\pi. \tag{5.3}$$

这就是曲面上关于简单光滑闭曲线的 **Gauss-Bonnet 公式**.

如果曲线 C 是曲面 S 上的一条分段光滑闭曲线, 它由 n 段光滑曲线 $C_1, \cdots, C_n$ 所组成, 设这些光滑曲线的交接处的外角为 θ_i, $(i = 1, \cdots, n)$. 则

$$\oint_C k_g ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g ds, \quad \oint_C d\theta = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} d\theta,$$

而且对每一条曲线C_i都成立(5.3)式, 再把它们加起来, 利用Green公式后有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}k_g\,ds &= \sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}d\theta+\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v du+G_u dv)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}d\theta-\iint_{\mathcal{D}}K\,dA.\end{aligned}$$

因为曲线$C=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n$的切向量在这些光滑曲线的交接处有"跳跃"(即角亏). 而这些"跳跃"角就是交接点处的外角θ_i. 类似于切线回转指标定理的证明, 可知切线绕分段光滑曲线C一周后的转角是

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}d\theta=2\pi-\sum_{i=1}^{n}\theta_i,$$

总结上述讨论, 我们得到下述著名的定理:

定理 5.1 (Gauss-Bonnet) 设$C=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n$是曲面$S$上一条逐段光滑简单闭曲线, 而这些光滑曲线段在交接处的外角为θ_i, 且C围成曲面上的一个单连通区域$\mathcal{D}$, 那么成立

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i+\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i}k_g\,ds+\iint_{\mathcal{D}}K\,dA=2\pi. \tag{5.4}$$

推论 5.2 如果曲线C中每段光滑曲线C_i是测地线, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i+\iint_{\mathcal{D}}K\,dA=2\pi. \tag{5.5}$$

若用α_i表示测地n边形的外角θ_i所对应的内角, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=(n-2)\pi+\iint_{\mathcal{D}}K\,dA. \tag{5.6}$$

当$n=3$时, 这正是Gauss最初得到的关于测地三角形内角和的结论. 特别地, 当曲面S是平面时, (5.5)和(5.6)式分别是平面几何中多边形外角和与内角之和公式.

B 复连通区域上的Gauss-Bonnet公式

设$\mathcal{D}$是曲面S上含有p个洞的复连通区域, 如图, 设其边界由$p+1$条光滑曲线$C_0, C_1, \cdots, C_p$围成, 用光滑曲线γ_i联结C_0和C_i $(i = 1, 2, \cdots, p)$. 规定边界的正向为: 当沿此方向前进时, 区域$\mathcal{D}$始终保持在左侧. 若沿着γ_i剪开即得到一个单连通区域, 因此允许我们应用(5.3)式, 但在考虑沿γ_i的积分时, 因两次计入, 符号(方向)相反. 故

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{\gamma_i} k_g \, ds = 0.$$

γ_i与C_0联结时出现和等于π的两个外角, 同样, γ_i和C_i联结时也出现两个和等于π的外角, 因此公式(5.3)中的$\sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi p$. 最后得到复连通区域的**Gauss-Bonnet公式**

$$\iint_{\mathcal{D}} K \, dA + \sum_{i=1}^{p} \int_{C_i} k_g \, ds = 2\pi(1 - p), \tag{5.7}$$

C 整体Gauss-Bonnet定理

为了将Gauss-Bonnet公式再做整体性推广, 比如说, 推广到紧致曲面S上, 则更多地需考虑其拓扑性质. 假设$\mathcal{D}$是曲面M上的一个区域, 它的边界是由互不相交的n条单纯分段光滑闭曲线组成. (即由$A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_1$等有限段光滑曲线弧连接而成的自身不相交的曲线, 这些弧之间除连接点外没有交点). 由拓扑学知, 我们一定可把$\mathcal{D}$三角剖分, 即把$\mathcal{D}$分割成许多以三条曲线段为边界的曲面三角形. 如果M是可定向的, 我们依曲面的法向量为方向, 依右手规则可定出每个三角形的边界的定向, 这时内部边界的定向刚好相互抵消(以上事实这里不予严格证明).

经过这样剖分后, 我们得出三个数: F—三角形个数, E—边的条数, V—顶点的个数. 称整数$F - E + V$为区域$\mathcal{D}$的**Euler-Poincaré示性数**, 记为

$$\chi(\mathcal{D}) = F - E + V. \tag{5.8}$$

上述定义右边好象与三角剖分有关, 其实不然, $\chi(\mathcal{D})$与剖分的方式无关, 是曲面的拓扑不变量. 另外, 我们总可把区域$\mathcal{D}$三角剖分得很细, 使每个三角形落在一个测地坐标系内. 事实上, 如果分割得不够小, 我们

总可再加入一个顶点得到一个新的分割. 记这新分割下对应的面、边、顶的数目为$\bar{F}, \bar{E}, \bar{V}$. 易知$\bar{F} = F + V - 1, \bar{E} = E + V, \bar{V} = V + 1$. 故$\bar{F} - \bar{E} + \bar{V} = F - E + V$. 因此, 我们总可把$\mathcal{D}$细分使每个三角形落在一个测地坐标系内, 即使三角形的每条弧段是测地线. 有了这些准备, 我们可以叙述整体Gauss-Bonnet定理.

定理 5.3 (Gauss-Bonnet) 若M是紧致无边可定向闭曲面, 则

$$\iint\limits_M K\,dA = 2\pi\chi(M). \tag{5.9}$$

证明 假设把M细分成若干测地多角形区域$\mathcal{R}_i, (i = 1, \cdots, F)$, $\mathcal{R}_i$的边界为C_i, 而φ_{ij}是C_i的内角. 对每个区域$\mathcal{R}_i$应用Gauss-Bonnet公式知

$$\begin{aligned}\iint\limits_M K\,dA &= \sum_{i=1}^F [2\pi - \sum_j (\pi - \varphi_{ij})]\\ &= 2\pi F - \sum_{i=1}^F \sum_j \pi + \sum_{i=1}^F \sum_j \varphi_{ij}.\end{aligned}$$

而$\sum\limits_j \pi = (C_i\text{的顶点数}) \times \pi = C_i\text{的边数} \times \pi$, 因为每条边属于两个三角形, 所以$\sum\limits_{i=1}^F \sum\limits_j \pi = 2\pi E$, $\sum\limits_{i=1}^F \sum\limits_j \varphi_{ij}$是所有内角和. 在每个顶点处内角和是$2\pi$, 因此$\sum\limits_{i=1}^F \sum\limits_j \varphi_{ij} = 2\pi V$. 最后, $\iint\limits_M K\,dA = 2\pi F - 2\pi E + 2\pi V = 2\pi\chi(M)$. □

Gauss-Bonnet定理的最重要的特点之一是: 为紧致曲面的拓扑量和它的几何量— 曲率的积分提供一个有价值的联系, 尽管Gauss曲率依赖于S上给定的黎曼度量, 即第一基本形式, 然而其积分却都是与度量毫无关系的拓扑量$2\pi\chi(S)$. Gauss-Bonnet定理在高维的推广是现代微分几何发展的一个重要的原动力.

最后给出Gauss-Bonnet公式的两个应用以结束本节. 其一是关于空间正则闭曲线的主法线球面标线的Jacobi定理. 另一个是回答上节指出的曲面上向量绕闭曲线平行移动一周后产生的角差.

定理 5.4 (Jacobi, 1842) 设$\boldsymbol{r}(s)$是曲率处处不为零的空间正则闭曲线, 如果它的主法线球面标线$\boldsymbol{N}(s)$是单位球面$S^2(1)$上的一条简单光滑闭曲线. 则这条主法线的球面标线必定平分$S^2(1)$的面积.

【证明】 设$\bar{s}$是球面标线$\boldsymbol{N}(s)$的弧长, 因为$\boldsymbol{N}(s)$在球面S^2上, 故沿$\boldsymbol{N}(s)$, S^2的单位法向量就是$\boldsymbol{N}(s)$. 于是$\boldsymbol{N}(s)$的测地曲率按定义为

$$\bar{\kappa}_g(s) = \left(\frac{d^2\boldsymbol{N}}{d\bar{s}^2}, \boldsymbol{N}, \frac{d\boldsymbol{N}}{d\bar{s}}\right). \tag{5.10}$$

由Frenet公式, 得

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{N}}{d\bar{s}} &= \frac{d\boldsymbol{N}}{ds}\frac{ds}{d\bar{s}} = (-\kappa\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B})\frac{ds}{d\bar{s}},\\
\frac{d^2\boldsymbol{N}}{d\bar{s}^2} &= (-\kappa\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B})\frac{d^2s}{d\bar{s}^2} + (-\kappa'\boldsymbol{T} + \tau'\boldsymbol{B})\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2\\
&\quad - (\kappa^2 + \tau^2)\boldsymbol{N}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2.\\
\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 &= \frac{1}{\kappa^2 + \tau^2},
\end{aligned}$$

将以上这些计算结果代入(5.10), 整理得到

$$\bar{\kappa}_g = \frac{d}{ds}(\arctan\frac{\tau}{k})\frac{ds}{d\bar{s}}.$$

现在把Gauss-Bonnet定理应用到单位球面上由曲线所围成的区域(之一)$\mathcal{D}$上去, 由于这时$K \equiv 1$, 我们便有

$$2\pi = \iint\limits_{\mathcal{D}} K\, d\sigma + \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \bar{\kappa}_g\, d\bar{s} = \iint\limits_{\mathcal{D}} d\sigma = \mathcal{D}\text{的面积}.$$

而$S^2(1)$的面积为4π, 所以主法线球面标线$\boldsymbol{N}(s)$平分了$S^2(1)$的面积. □

定理 5.5 设C是单连通曲面$S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$上一条闭曲线, 则向量沿$C$平移一周后产生的角差是$\iint_{\mathcal{D}} K\, dA$, 其中$\mathcal{D}$是$C$所围成的曲面域.

证明 在曲面上取正交参数曲线网, 那么u^1-线和u^2-线的单位切向量为

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_1, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_2.$$

设闭曲线 $C: u^1=u^1(s), u^2=u^2(s)$ 上的单位向量场 $\boldsymbol{a}(s)$ 与 u^1-线的正向夹角为 $\theta(s)$, 那么 $\boldsymbol{a}(s)=\cos\theta(s)\boldsymbol{e}_1+\sin\theta(s)\boldsymbol{e}_2$. 如果向量场 $\boldsymbol{a}(s)$ 是平行向量场, 那么 $D\boldsymbol{a}=0$, 由协变微分的性质即有

$$(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)d\theta+(\cos\theta D\boldsymbol{e}_1+\sin\theta D\boldsymbol{e}_2)=0,$$

将上式两边与 $(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)$ 作内积得到

$$d\theta=-(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)\cdot(\cos\theta D\boldsymbol{e}_1+\sin\theta D\boldsymbol{e}_2).$$

注意到 $e_1\cdot\boldsymbol{e}_1=1,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0,\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=1$, 取协变微分得到

$$\boldsymbol{e}_1\cdot D\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot D\boldsymbol{e}_2=0,\quad D\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1\cdot D\boldsymbol{e}_2=0,$$

因此得到

$$\begin{aligned}d\theta&=-\frac{\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{EG}}D\boldsymbol{r}_1\\&=-\sqrt{\frac{G}{E}}(\Gamma_{11}^2du^1+\Gamma_{12}^2du^2)\\&=d\phi-\kappa_g ds.\end{aligned}\tag{5.11}$$

如果向量 $\boldsymbol{a}_0$ 沿 C 平移一周后得到的向量是 $\boldsymbol{a}_1$, 将 (5.11) 沿曲线 C 积分一周后就得到了角差 $\Delta\theta=\theta_1-\theta_0$ (即 $\boldsymbol{a}_0$ 与 $\boldsymbol{a}_1$ 的角差) 为

$$\oint_C d\theta=\oint_C d\phi-\oint_C\kappa_g\,ds.$$

再由切线旋转指标定理及 Gauss-Bonnet 公式知道

$$\oint_C d\theta=(2\pi-\sum_i\theta_i)-(2\pi-\sum_i\theta_i-\iint_D K\,d\sigma)=\iint_D K\,d\sigma.\tag{5.12}$$

□

定理 5.6 在单连通曲面 S 上, Levi-Civita 平移与道路无关的充要条件是曲面 S 为可展曲面.

证明 当曲面为可展曲面时, 高斯曲率 $K\equiv0$, 由 (5.12) 我们得到 $\int_C d\theta=0$, 这时向量 $\boldsymbol{a}$ 沿 C 平行移动一周后就回到了原来的位置, 等价地说, Levi-Civita 平移与道路无关, 充分性得证.

现在用反证法证明必要性. 若曲面S上的高斯曲率K不恒等于零, 不妨假设K在曲面S上的P_0点大于零, 则由K是连续函数, 它在P_0点的一个邻域内大于某定常数δ. 设C为这个邻域内包围点P_0的一条光滑闭曲线, 且C包围的区域$\mathcal{D}$是单连通的. 设A为区域$\mathcal{D}$的面积, 那么由(5.12)式知道

$$\Delta\theta = \oint_C d\theta = \iint_{\mathcal{D}} K\,d\sigma \geq \iint_{\mathcal{D}} \delta\,d\sigma = \delta\cdot(\mathcal{D}\text{的面积}) > 0.$$

另一方面,

$$\Delta\theta = \oint_C d\theta = \iint_{\mathcal{D}} K\,dA \leq \max_{\mathcal{D}} K\cdot(\mathcal{D}\text{的面积}),$$

显然我们总可以选取C充分地小, 使区域$\mathcal{D}$的面积充分小, 从而得到$0 < \Delta\theta < 2\pi$. 这就说明一个向量沿上述选取的曲线C平移一周后不能回到原来的位置了, 这与已知矛盾. 故Gauss曲率恒为零. □

习题 4–5

1. 证明: 在高斯曲率非正的单连通曲面上, 不存在光滑的闭测地线. 单连通的条件必要吗?

【证明】 设曲面S是一高斯曲率非正的单连通曲面, 若其上存在一条光滑的闭测地线C, 则C的测地曲率$k_g = 0$, 由Gauss-Bonnet公式知$\iint_{\mathcal{D}} K\ dA = 2\pi$, 这与$S$上的高斯曲率$K \leq 0$矛盾.

C所围成单连通区域的条件是必要的, 例如在旋转单叶双曲面上(它的高斯曲率$K < 0$)存在着一条光滑闭测地线, 即曲面上的最小纬圆.

2. 已知与u-线交于θ角的测地线满足$d\theta = -(\sqrt{G})_2 dv$. 证明: Gauss-Bonnet公式在测地三角形的特殊情形: $\iint\limits_{\mathscr{D}} KdA = A + B + C - \pi$.

3. 设曲面上无限小的测地三角形ABC边长分别为a, b, c. 边AB所对应的角为C. 证明: 三角形面积σ与点C处的Gauss曲率有如下关系式:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(C - \frac{K\sigma}{3}\right).$$