4.4 协变微分与Levi-Civita平行移动

熟知, 平面上直线的切向量都是平行的, 人们自然会问: **曲面上测地线的切向量是否也是平行的**? 显然, 如果按三维欧氏空间中的平行去理解, 问题的答案是否定的. 再者, 如果把曲面上P点处的切向量$\boldsymbol{a}$按三维欧氏空间中的平移, 平移到曲面的Q点处, 得到的向量未必切于该曲面. 由此可见, 我们不能按$\mathbb{R}^3$中的平移方式来讨论曲面上的向量是否平行, 必须改变原有的欧氏平移概念.

设曲面$S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$上有一条曲线$C:u^1=u^1(t),u^2=u^2(t)$. 又设在$S$上沿$C$有一切向量场$\boldsymbol{a}(t)$, 即对$C$上任一点$P(u^1(t),u^2(t))$, 在$P$点处有一个确定的向量$\boldsymbol{a}(t)$, 我们把$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$作为对应于$P$点处切平面上的两个基向量, 那么

$$\boldsymbol{a}(t)=a^1(t)\boldsymbol{r}_1+a^2(t)\boldsymbol{r}_2, \tag{4.1}$$

这里$a^i(t)$ $(i=1,2)$称为向量$\boldsymbol{a}(t)$的分量. 如果函数$a^i(t)$是t的光滑函数, 则称$\boldsymbol{a}(t)$为**光滑向量场**, 以后我们讨论的向量场都是光滑向量场.

- 如果S是平面, 并取(u^1,u^2)是直角坐标系, 那么向量场$\boldsymbol{a}(t)$中所有向量都互相平行的充要条件是

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=0, \quad 或 \quad \frac{da^1}{dt}=0, \quad \frac{da^2}{dt}=0.$$

- 对于一般曲面S, 为讨论向量场$\boldsymbol{a}(t)$中向量是否互相平行, 我们先考察$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$. 由Gauss公式知

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\sum\left(\frac{da^k}{dt}+\Gamma_{ij}^k a^i\frac{du^j}{dt}\right)\boldsymbol{r}_k+\sum a^i\frac{du^j}{dt}b_{ij}\,\boldsymbol{n}, \tag{4.2}$$

由此可见, $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$一般不再是曲面上的切向量.

我们把$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$按法方向$\boldsymbol{n}$投影到曲面$S$的切平面上去, 得到的投影向量为

$$\sum\left(\frac{da^k}{dt}+\Gamma_{ij}^k a^i\frac{du^j}{dt}\right)\boldsymbol{r}_k, \tag{4.3}$$

当然它是曲面 S 上的向量了. 我们记

$$D\boldsymbol{a}=\sum(da^k+\Gamma_{ij}^k a^i du^j)\,\boldsymbol{r}_k, \tag{4.4}$$

称它为向量场 $\boldsymbol{a}(t)$ 的沿曲线 C 的**共变微分**或**绝对微分**.

如上所见, 曲面 S 上的向量场 $\boldsymbol{a}(t)$ 经过普通微分后所得到的 $d\boldsymbol{a}$ 一般不再是曲面 S 上的向量场, 而经过绝对微分后得到的向量 $D\boldsymbol{a}$ 仍为曲面上的向量场. 因此在曲面 S 上我们用协变微分代替普通微分. 另外, 由 (4.3) 可以看出协变微分的概念只涉及曲面的第一基本形式, 因此协变微分是曲面的内蕴几何概念. 根据 (4.3) 显见普通微分与协变微分之间的关系是

$$d\boldsymbol{a}=D\boldsymbol{a}+\sum b_{ij}a^i du^j\boldsymbol{n}. \tag{4.5}$$

下面定理表明, 协变微分与普通微分有着类似的微分法则.

定理 4.1 设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 是曲面 S 上沿曲线 C 的两个切向量场, f 是定义在曲线 C 上的实值函数, 则有

(1) $D(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=D\boldsymbol{X}+D\boldsymbol{Y}$,

(2) $D(f\boldsymbol{X})=df\cdot\boldsymbol{X}+f\,D\boldsymbol{X}$,

(3) $D(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y})=(D\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}\cdot(D\boldsymbol{Y})$.

证明 按定义直接验证即可, 留作习题.

有了绝对微分的概念, 我们可以把平面上平行的概念推广到曲面上去. 平面上, 一个向量场 $\boldsymbol{a}$ 是平行向量场的充要条件是 $d\boldsymbol{a}=0$. 类似地, 设 $\boldsymbol{a}(t)$ 是曲面 S 上沿曲线 C 的一个切向量场. 如果 $D\boldsymbol{a}=0$, 那么称向量场 $\boldsymbol{a}(t)$ **沿曲线 C 是平行向量场**, 或者说向量场 $\boldsymbol{a}(t)$ 中的向量(沿曲线 C)是互相平行的. 也可以说这个向量场中的向量是由 $\boldsymbol{a}(s_0)$ (沿曲线 C)经过平行移动得到的. 我们称这种平移为 **Levi-Civita 平移**. 当然, 如果曲面是欧氏平面, 那末取第一基本形式为 $I=ds^2=(du^1)^2+(du^2)^2$, 此时 Levi-Civita 平行归结为普通平行.

由 (4.4), $D\boldsymbol{a}=0$ 的充要条件是

$$da^k+\sum\Gamma_{ij}^k a^i du^j=0,\quad k=1,2. \tag{4.6}$$

因为 (4.6) 式是关于 $a^k(k=1,2)$ 的两个线性齐次方程组, 根据常微分方程组解的存在唯一性定理, 当给定初始条件 $a^k(s_0)=a_0^k$ 时, 方程组 (4.6) 有唯一解

$a^k(s)$. 换言之, 在曲面上每一切向量都可沿曲面上一条曲线作Levi-Civita平移产生一个平行向量场, 我们把这个向量场称为由某向量沿曲线平行移动产生的.

在欧氏平面上普通的平移是保持向量的长度不变的, 并且同时保持两个向量之间的交角不变. 那么曲面上Levi-Civita平行移动是否有这个性质呢? 利用定理4.1(3), 容易得到

定理 4.2 Levi-Civita平行移动保持两向量的内积不变的, 所以保持向量长度和两个向量之间的夹角不变.

现在回到本节开始提出的问题, 考察曲面上测地线的切向量场是否是平行向量场. 设$C: u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$是曲面$S$上一条曲线, 那么它的切向量场为$\boldsymbol{V}(t) = \frac{du^1}{dt}\boldsymbol{r}_1 + \frac{du^2}{dt}\boldsymbol{r}_2$. 因此由(4.6)式知道$C$上切向量场$\boldsymbol{V}(t)$是平行向量场的充要条件为

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \sum \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0, \quad k = 1, 2. \tag{4.7}$$

这恰好为C是测地线的微分方程. 因此得到

定理 4.3 曲面S上一条曲线C为测地线的充要条件是它的切向量场在Levi-Civita平行移动意义下是平行的.

【例 1】 设球面S^2的方程为$\boldsymbol{r}(\varphi, \theta) = \{\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\}$, 曲线$C: \boldsymbol{\gamma}(\theta) = \boldsymbol{r}(\varphi_0, \theta)$是$S^2$上的一个纬圆, 在$\theta = 0$处的切向量$\boldsymbol{\gamma}'(0) = \{\cos\varphi_0, 0, -\sin\varphi_0\}$. 现在我们来求出$\boldsymbol{\gamma}'(0)$沿曲线$C$平行移动产生的向量场$\boldsymbol{V}(t)$.

因为S^2的第一基本形式系数矩阵

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi \end{pmatrix},$$

因此$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \Gamma_{22}^1 = -\sin\varphi\cos\varphi$, 其余所有$\Gamma_{ij}^k$是零. 这样平行移动的方程(4.6)化为

$$\begin{cases} \frac{da^1(\theta)}{d\theta} - \sin\varphi_0\,\cos\varphi_0\, a^2(\theta) = 0, \\ \frac{da^2(\theta)}{d\theta} + \frac{\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}\, a^1(\theta) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

初始条件为 $a^1(0)=1, a^2(0)=0$, 解微分方程组 (4.8) 得

$$\begin{cases} a^1(\theta)=\cos((\cos\varphi_0)\theta) \\ a^2(\theta)=\frac{-\sin((\cos\varphi_0)\theta)}{\sin\varphi_0}, \end{cases}$$

这样 $\boldsymbol{\gamma}'(0)$ 沿曲线 C 平行移动产生的向量场为

$$\boldsymbol{V}(\theta)=\cos((\cos\varphi_0)\theta)\,\boldsymbol{r}_1-\frac{\sin((\cos\varphi_0)\theta)}{\sin\varphi_0}\,\boldsymbol{r}_2.$$

注意 $\boldsymbol{V}(0)\neq\boldsymbol{V}(2\pi)$, 因此 $\boldsymbol{\gamma}'(0)$ 沿曲线 C 平行移动一周后没有回到原来的位置. 特别若取 $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$ 时, 平移一周后 $\boldsymbol{V}(0)$ 与 $\boldsymbol{V}(2\pi)$ 的方向恰好相反.

由此可见, 一般来说, 曲面上切向量沿一条封闭曲线平行移动一周后所得的切向量与原切向量未必重合, 即 Levi-Civita 平行移动与道路有关, 这是弯曲曲面上的几何学与欧氏平面几何学的本质差别. 下一节我们将用 Gauss-Bonnet 公式给出一个向量沿曲面上一条闭曲线平移一周后产生的角差.

习题 4–4

1. 证明定理 4.1.

2. 设曲面的第一基本形式为 $I=du^2+2F\,du\,dv+dv^2$. 证明坐标曲线切向量场 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 分别沿着坐标曲线 $u=$ 常数与 $v=$ 常数是平行的.