4.3 测地线

平面几何中, 直线起了非常重要的作用. 本节我们希望找出任意曲面上与直线作用类似的曲线, 换言之, 希望找出平面上直线在曲面上的对应物, 将这种对应物称之为测地线. 为此, 我们首先回忆平面上直线的如下基本性质:

(SL1) 直线的特征是相对曲率恒为零;
(SL2) 由一点和一方向, 惟一确定一条直线;
(SL3) 平面上, 两点之间有惟一一条直线连结;
(SL4) 平面上, 两点之间直线段距离最短;
(SL5) 平面上, 沿直线, 切向量是平行的.

研究的过程设想为先给出测地线的定义, 然后对照平面上直线的上述五条基本性质, 讨论曲面上的测地线是否也具有类似的性质. 如果比较的结果令你满意的话, 你当然会觉得曲面上众多曲线中, 测地线是重要的, 而且是值得研究的对象.

曲面 S 上测地曲率恒等于 0 的曲线 C, 称为曲面 S 上的**测地线**.

(SL1) 当曲面是平面时, 取直角坐标系, 则 $E=G=1$, 这时计算测地曲率的Liouville公式即为 $\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}$, 这正是平面曲线的相对曲率. 可见曲面上曲线的测地曲率是平面曲线相对曲率在曲面上的推广. 熟知, 平面上相对曲率为零的曲线是直线, 因此测地线可看作平面上直线的概念在曲面上的推广.

(SL2) **测地线的存在性** 由引理2.1 (iii),

$$\kappa_g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T})=\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{d^2u^k}{ds^2}+\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k.$$

因此

$$\kappa_g=0\Longleftrightarrow\frac{d^2u^k}{ds^2}+\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=0,\quad(k=1,2)\qquad(3.1)$$

由此可见, 曲面上测地线的存在性等价于微分方程组 (3.1) 的解的存在性.

方程组 (3.1) 是以 $u^1(s),u^2(s)$ 为因变量, 以 s 为自变量的二阶常微分方

程组, 由常微分方程组的理论, 如果我们给定初始条件

$$u^i(s_0)=u^i_0,\quad \frac{du^i}{ds}(s_0)=\left(\frac{du^i}{ds}\right)_0,\quad i=1,2 \tag{3.2}$$

则在 $s=s_0$ 的一个适当小邻域内, 方程组 (3.1) 有满足初始条件 (3.2) 的唯一解 $u^i=u^i(s)$, $i=1,2$. 把它作为参数方程, 就得到曲面上的一条测地线.

注意到初始条件 (3.2) 的几何意义就是在曲面上给定一点 $P_0(u^1_0,u^2_0)$ 及在该处的一个定方向 $\left(\frac{du^1}{ds}\right)_0:\left(\frac{du^2}{ds}\right)_0$. 因此我们得到

定理 3.1 从曲面 S 上任意点出发, 沿着任何方向 (du^1,du^2), 总能引出唯一一条测地线(当然这条测地线仅仅定义在出发点的一个邻域内, 这是一个局部存在性定理[1]).

特别地, 若曲面 S 的坐标网正交, 那么测地线的微分方程也可以用 Liouville 公式表示为

$$\begin{cases}\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{2\sqrt{G}}\,\frac{\partial\ln E}{\partial v}\,\cos\theta-\frac{1}{2\sqrt{E}}\,\frac{\partial\ln G}{\partial u}\,\sin\theta,\\ \frac{du}{ds}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}},\\ \frac{dv}{ds}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}.\end{cases} \tag{3.3}$$

这是以 $u(s),v(s),\theta(s)$ 为因变量, 以 s 为自变量的一阶常微分方程组. 给定初始条件

$$\begin{cases}u=u_0,\quad v=v_0 & (\text{表示曲面上一给定点})\\ \theta=\theta_0 & (\text{表示曲面上一方向})\end{cases}$$

根据常微分方程组的理论, 方程组 (3.3) 有满足该初始条件的唯一解. 即 S 上过给定点及该点处的一个方向有唯一一条测地线.

有时我们把 (3.3) 式改写为

$$\begin{cases}\frac{dv}{du}=\sqrt{\frac{E}{G}}\tan\theta\\ \frac{d\theta}{du}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\tan\theta\end{cases} \tag{3.4}$$

[1]测地线能否延伸到无穷远, 涉及到曲面的完备性. 曲面称为是**完备的**, 如果它的每一条测地线都可以无限延伸. Hopf 和 Rinow 的著名定理告诉我们, 曲面是完备的当且仅当它作为度量空间是完备的.

这是以 $v(u), \theta(u)$ 为因变量, 以 u 为自变量的一阶常微分方程组, 它对于每个初始条件

$$\begin{cases} v(u_0) = v_0, & (\text{表示曲面上一给定点}) \\ \theta(u_0) = \theta_0 & (\text{表示曲面上一方向}) \end{cases}$$

有唯一解 $v = v(u), \quad \theta = \theta(u)$, 由此确定了曲面上唯一一条测地线.

【例 1】 试确定球面上的测地线.

【解】 设 C 是半径为 R 的球面上的大圆(弧), 则熟知 C 的曲率 $k = \frac{1}{R}$, 法曲率 $k_n = \pm\frac{1}{R}$, 于是 C 的测地曲率 $\kappa_g = \pm\sqrt{k^2 - k_n^2} = 0$. 从而球面上的大圆曲线(段)是测地线.

另一方面, 对于球面上任一给定点及这点的一个单位切向量, 都可引一条大圆弧, 使得这个大圆弧通过这点及在这点的大圆弧的单位切向量就是给定的单位向量, 而这大圆弧就是测地线, 由测地线的唯一性知球面上所有测地线就是大圆弧全体.

【例 2】 求平面上的测地线.

【解】 由正交网时测地线的微分方程, 平面 $I = du^2 + dv^2$ 上的测地线的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{dv}{du} = \tan\theta \\ \frac{d\theta}{du} = 0 \end{cases}$$

则有 $\theta = \text{const.}$, $v = u\tan\theta + c$ (c 为积分常数), 即平面上的测地线是直线.

(SL3) 考察球面上南极点和北极点, 由例 2 知, 连结南极和北极两点的所有经线都是测地线, 可见, 曲面上连结两点的测地线一般不惟一. 再如, 取曲面 $S = \mathbb{R}^2 \backslash (2, 0)$, 则其上连结点 $(0, 0)$ 和点 $(4, 0)$ 的测地线不存在.

(SL4) **测地线的短程性质** 众所周知, 在平面上连接两点之间距离最短的道路是直线. 在曲面上, 测地线也具有类似的性质.

定理 3.2 曲面上连结两点距离最短的曲线一定是测地线.

证明 设 P, Q 是曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ 上任意两点, $C: u^i = u^i(s)$ ($s \in [a, b]$) 是 S 上连接 P, Q 两点的一条弧长参数曲线, 即有 $\boldsymbol{r}(a) = P, \boldsymbol{r}(b) = Q$. 为了理解定理中“最短”的含义, 下面先简要介绍曲面上曲线变分的概念.

让曲线 C 在曲面 S 上作保持两个端点的连续变动, 得到曲面上一族曲线 $\{C_t\}$, 它们的参数方程为

$$C_t : \boldsymbol{r}(s,t) = \boldsymbol{r}(u^1(s,t), u^2(s,t)),\ s \in [a.b],\quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

这里 t 是曲线族参数, $t = 0$ 时的曲线 C_0 正好就是曲线 C; s 是曲线 C_t 的参数(这里必须注意, s 是曲线 C 的弧长参数, 但未必是 C_t 的弧长参数). 这样得到的曲线族 $\{C_t\}$ 称为曲线 C 的一个**变分**. 简单地说, 曲线 C 的变分就是将曲线 C 嵌入到在它周围变化的一个曲线族 C_t 中去. 于是"最短"的含义就是对于曲线 C 的任何变分 $\{C_t\}$, C 的长度不超过变分曲线族 $\{C_t\}$ 中任何曲线的长度.

如果我们记曲线 C_t 的长度为 $L(C_t)$, 则 $C = C_0$ 是最短的必要条件是

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(C_t) = 0. \tag{3.5}$$

下面我们要把条件 (3.5) 表示出来, 然后利用它完成定理的证明.

当我们固定参数 s, 而变动 t 时, 就得到了曲面上另一族曲线, 它的切向量为 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$, 所以 $\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right|_{t=0}$ 是曲面 S 沿曲线 C 的一个切向量场, 于是我们令

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}(s,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = f(s)\boldsymbol{T} + h(s)\,(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{T}),$$

称之为**变分向量场**, 其中 $f(s), h(s)$ 是沿曲线 C 定义的两个光滑函数. 由于曲线 C 的连续变动的任意性, 导致函数 $f(s), h(s)$ 的任意性. 这一点将在下面会被用到. 有了变分向量场, 我们可以径直做如下计算:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dL(t)}{dt}\right|_{t=0} &= \int_a^b \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}(s,t)}{\partial s}\right|^{-1/2} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(s,t)}{\partial t\,\partial s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}(s,t)}{\partial s}\right)_{t=0} ds \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(s,t)}{\partial t\,\partial s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}(s,t)}{\partial s}\right)_{t=0} ds \\
&= \int_a^b \boldsymbol{T} \cdot [f'\boldsymbol{T} + f\dot{\boldsymbol{T}} + h'(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{T}) + h(\dot{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{T} + \boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{T}})]\, ds \\
&= \int_a^b [h\boldsymbol{T} \cdot (\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{T}}) + f']\, ds
\end{aligned}$$

由于$\dot{\boldsymbol{T}} = \kappa \boldsymbol{N} = \kappa_n \boldsymbol{n} + \kappa_g(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{T})$, 代入上式继续计算得到

$$L'(0) = f(b) - f(a) - \int_a^b h\kappa_g \, ds,$$

又因为在$s = a, b$处, $\boldsymbol{r} =$常向量, 所以

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}(s,t)}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\ s=a,b}} = 0,$$

即有$f(a) = f(b) = 0$. 于是

$$L'(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(C_t) = -\int h\kappa_g \, ds. \tag{3.6}$$

(3.6)称为**弧长第一变分公式**.

现在, 设曲线C是连结两点P, Q的长度最短的曲线, 则$L'(0) = 0$, 我们证明C为测地线. 反设在曲线C上点x处$k_g(x) \neq 0$, 不妨设$k_g(x) > 0$, 于是由连续性, 存在点x的一个小邻域U_x, 使得在U_x上$\kappa_g > 0$. 取C^2函数,

$$h = \begin{cases} h(s) > 0, & s \in U_x^\circ \\ h(s) = 0, & \text{其它} \end{cases}$$

这时, (3.6)式右端积分小于0, 与$L'(0) = 0$矛盾, 类似地证明$\kappa_g(x) < 0$也不可能. 从而反设不成立, 即曲线C为测地线. □

注意, 定理3.2只说明最短连线是测地线, 这并不意味着测地线一定是最短连线. 如在球面上任取非直径端点的两点, 连接它们的测地线(即大圆弧)有两条, 一条优弧, 一条劣弧, 劣弧是最短线, 而优弧却不是. 又如在圆柱面上, 联结任意两点的无数多条螺线(包括直母线和纬圆)中, 在一般情况下, 有一条绕柱面不足半周, 在特殊情况下, 有两条绕柱面恰恰半周. 这些都是最短连线, 其余都不是.

事实上, 由(3.6), 测地线只是弧长的临界值, 是否最小还依赖于弧长的二阶变分. 不过, 下面定理告诉我们, 如果在一个适当小的曲面域中, 测地线确实是最短连线.

定理 3.3 在一片充分小的曲面片上, 一条测地线是它自己上面任意两点的最短连线(因此测地线又称**短程线**).

为了证明测地线这一最短性, 我们先在曲面上建立半测地坐标网.

在曲面S上取一条曲线C, 依定理3.1知道在C上每一点及与C正交的方向必有一条测地线. 因此得到一族与C正交的测地线. 这些测地线在适当小的区域U内互相不交, 而在这个区域U内每一点恰属族中的一条测地线. 再取这族测地线的正交轨线, 称它为**测地平行线**. 这样在U中得到两族曲线, 且在U中每一点有每族中的唯一一条曲线. 取测地线族为u-线族, 测地平行线为v-线, 则得局部参数坐标网, 这种参数网称为曲面上的**半测地坐标网**, 此时把(u,v)称为**半测地坐标**.

现考虑曲面S上采用半测地坐标网后, 它的第一基本形式有何特点. 首先, 半测地坐标网是正交网, 则

$$I = Edu^2 + Gdv^2.$$

其次由于u-线是测地线, 由Liouville公式即得 $\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v} = 0$. 故 $\frac{\partial \ln E}{\partial v} = 0$, 由此$E$只依赖于$u$. 这时, 令

$$d\sigma = \sqrt{E}du,$$

则σ为u-线的弧长(事实上, 这时u-线的方程可写成$\boldsymbol{r}(u,v_0) = \boldsymbol{r}(u(\sigma),v_0)$, 且$|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}| = |\boldsymbol{r}_u\frac{du}{d\sigma}| = 1$, 即$\sigma$是$u$-线的弧长参数), 而且$S$的第一基本形式为

$$I = d\sigma^2 + Gdv^2.$$

下面利用半测地坐标网证明测地线的短程性质.

定理3.3的证明 设C为包含在曲面S上一区域U内的一条测地线, 这里U足够小, 以使在U内可建立半测地坐标网. 在U上取含C在内的一族测

地线为u-线, 它的正交轨线为v-线, 则S的第一基本形式为

$$I = d\sigma^2 + Gdv^2.$$

设P_1和P_2是C上任两点, 对应于C上的弧长参数为σ_1及σ_2(设$\sigma_1 < \sigma_2$), 则C的弧长$L(C) = \sigma_2 - \sigma_1$. 若$C^*$是$U$内联结$P_1$和$P_2$的任意曲线, 其方程设为$v = v(\sigma)$, 则$C^*$的弧长为

$$\begin{aligned} L(C^*) &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{1 + G\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2}\, d\sigma \\ &\geq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 = L(C). \end{aligned}$$

而且只有当$dv = 0$时, 等号才成立, 但$dv = 0$即$v = \text{const.}$, 这时C^*是u-曲线. 因此等号成立当且仅当C与C^*重合. 从而证明了局部地, 测地线是联结两点的最短线. □

我们将在本章第四节把直线的性质(SL5)推广到曲面上测地线的情形. 除了以上讨论的五条性质外, 我们在这里归纳出测地线的一些其它基本性质, 证明是容易的, 留给读者作为练习.

- 测地线具有等距不变性.
- 曲面S上一条非直线的曲线C为测地线, 当且仅当C的从切平面与曲面S的切平面重合, 即$\boldsymbol{N} = \pm\boldsymbol{n}$.
- 若两曲面S_1和S_2沿一条曲线C相切, 则或者C同是S_1和S_2上的测地线, 或者都不是.
- 在曲面上同一点, 具有相同切线的一切曲线中, 以测地线的曲率为最小, 测地线的曲率等于同方向的法截线的曲率.
- 曲面S上一条曲线C在平面上可伸展为直线, 当且仅当C为S上的测地线.
- 曲面上, 直线, 而且只有直线既是渐近曲线, 又是测地线.

最后, 我们通过例子给出测地线的物理意义以结束此节.

【例 3】 倘若一质点可以自由地在曲面上运动, 如无外力作用, 则质点在曲面上的运动轨迹是一条测地线.

【证明】 设质点在曲面 S 上的运动轨迹 C 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, 其中 t 是时间, 因此该质点运动的加速度是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{ds}{dt}\right)\\&=\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\boldsymbol{T}\frac{d^2s}{dt^2}\\&=\kappa\boldsymbol{N}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\boldsymbol{T}\frac{d^2s}{dt^2},\end{aligned}$$

其中 s 表示运动轨迹曲线 C 的弧长, $\boldsymbol{T}$ 是 C 的单位切向量, $\boldsymbol{N}$ 是 C 主法线单位向量, κ 是 C 的曲率.

另一方面, 作用于质点的加速度是由曲面的反作用力而产生的, 这个力是沿曲面的法向 $\boldsymbol{n}$ 方向的. 因此加速度 $\boldsymbol{a}$ 是沿着曲面法线方向, 即 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{n}$, 但是 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}=0$, 故有 $\frac{d^2s}{dt^2}=0$, 这时由 $\boldsymbol{a}=\kappa\boldsymbol{N}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\boldsymbol{T}\frac{d^2s}{dt^2}$ 得出 $\boldsymbol{N}=\pm\boldsymbol{n}$, 由测地线的性质知 C 是测地线.

习题 4–3

1. 证明旋转曲面的子午线是测地线, 而平行圆仅当子午线的切线平行于旋转轴时是测地线.

【证明】 设 xOz 平面中的一条曲线 $C: x=f(v),\ z=g(v)$ 绕 z 轴旋转一周后得到的旋转曲面的方程为 $\boldsymbol{r}(u,v)=\{f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\}$, 则熟知

$$I=f^2du^2+[(f')^2+(g')^2]dv^2.$$

显然旋转曲面的 u-曲线为纬线, v-曲线为经线, 或称为子午线, 因 $F=0$, 所以旋转曲面的这两族参数曲线是正交的, 由正交网的测地曲率的 Liouville 公式, 对 v-参数曲线

$$\kappa_{g_v}=\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}=0,$$

这说明子午线是测地线.

同样对u-参数曲线

$$\kappa_{g_u} = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v} = -\frac{f'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}.$$

由此可知纬线圆成为测地线当且仅当$f'=0$, 换句话说即过这些纬圆上任何点的母线在该点的切线与旋转轴平行.

2. 求圆柱面上的测地线.

【解】 在圆柱面$\boldsymbol{r}(u,v)=\{a\cos u, a\sin u, v\}$上,

$$I = a\ du^2 + dv^2 = d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2 \quad (\bar{u}=au, \bar{v}=v).$$

同例 2, 可知圆柱面上测地线的方程为

$$\bar{v} = \bar{u}\tan\theta + c \quad \text{或} \quad v = (a\tan\theta)u + c,$$

其中c为积分常数, θ为常数. 对应的矢量式参数方程为

$$\boldsymbol{r}(u) = \{a\cos u, a\sin u, (a\tan\theta)u + c\},$$

这正是圆柱面上的圆柱螺线, 即圆柱面上的测地线是圆柱螺线, 当然包括所有直母线($\theta=\frac{\pi}{2}$)和纬圆($\theta=0$)在内.

3. 证明: 若曲面上的所有测地线都是平面曲线, 则曲面为全脐点曲面.