4.2 测地曲率与测地挠率

本节为下一节研究曲面上的测地线作些准备, 打算更一般地建立曲面上曲线的类似于$\mathbb{R}^3$中曲线的“Frenet”标架和“Frenet”公式, 从中引出测地曲率和测地挠率的概念. 可以想象, 由于有曲面的介入, 这样的研究将建立在中$\mathbb{R}^3$曲线论和曲面论的基础之上, 得到的结论自然要更丰富. 由于本节只想集中讨论测地曲率, 读者难免会觉得我们的做法有些虎头蛇尾, 不过这将为下一章用外微分和正交活动标架法重新研究曲面上的曲线开个头, 这也是现行教材的流行做法, 体现着关于曲面上曲线的研究方法更统一, 更完美, 研究内容更集中的特点.

设曲面S的方程为$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$, C是S上过$P(u^1,u^2)$的一条曲线, 参数方程是$u^i=u^i(s)$, 其中s是弧长参数. 那么曲线C作为$\mathbb{R}^3$中曲线的参数方程是

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}(s)=\boldsymbol{r}(u^1(s),u^2(s)). \tag{2.1}$$

相应的Frenet标架仍记为$\{\boldsymbol{\gamma}(s);\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s)\}$, $\kappa(s)$为其曲率函数. 现在, 我们沿曲线C建立一个新的正交标架场$\{\boldsymbol{\gamma}(s);\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{n}(s)\}$ (注意这里$\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{n}(u^1(s),u^2(s))$), 这样的标架场兼顾了曲线$C$和曲面$S$, 换句话它体现曲线附着在曲面上这一特点. 按照活动标架的思想, 对上述正交标架场微商并在该标架下分解, 则有

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa_g(s)&\kappa_n(s)\\ -\kappa_g(s)&0&\tau_g(s)\\ -\kappa_n(s)&-\tau_g(s)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

其中κ_g, κ_n, τ_g是由上式惟一确定的函数:

$$\begin{aligned}\kappa_g(s)&=\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\cdot(\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{T}(s)),\\ \kappa_n(s)&=\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\cdot\boldsymbol{n}(s),\\ \tau_g(s)&=\frac{d(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T})}{ds}\cdot\boldsymbol{n}(s).\end{aligned} \tag{2.3}$$

明显地, 这里的κ_n恰好是曲面S沿曲线C的切方向的法曲率. 称κ_g为曲面S上曲线C的**测地曲率**, τ_g为曲面S上曲线C的**测地挠率**.

为了今后应用方便, 下面给出关于测地挠率的几个基本事实.

推论 2.1 (i) $\kappa_g = \kappa\cos\angle(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{B})$;
(ii) $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$;
(iii) $\kappa_g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}) = \sum\limits_{k=1}^{2}\left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \sum\limits_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k$.

证明 由 κ_g 的定义式 (2.3) 和 Frenet 公式易得 (i). 注意到 $\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \kappa\boldsymbol{N}(s)$, 结合 (2.2) 便有 $\kappa\boldsymbol{N} = \kappa_g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}) + \kappa_n\boldsymbol{n}$, 由此立即得而 (ii). 为了验证 (iii), 利用曲线的参数方程 (2.1) 和曲面在自然标架下的运动公式, 如下直接计算

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(\boldsymbol{r}_i\frac{du^i}{ds}\right)\\ &= \frac{d^2u^i}{ds^2}\boldsymbol{r}_i + \frac{du^i}{ds}\left(\Gamma_{ij}^k\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{r}_k + b_{ij}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{n}\right)\\ &= \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k + b_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{n}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

将 (2.4) 与 (2.2) 比较即得结论 (iii). $\kappa_g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T})$ 称为曲线 C 的**测地曲率向量**

下面定理给出测地曲率和测地曲率的几何解释.

定理 2.2 曲线 C 在 P 点的测地曲率向量即为 C 在切平面 T_P 上的投影曲线 C' 在 P 点的曲率向量. 换句话说, 测地曲率即为在切平面上投影曲线的相对曲率.

证明 将曲线 C 投影到切平面 T_P 上, 得到 T_P 上的一条曲线 C', 这时投影直线就织成了一个柱面 Σ (如图 2.1). 曲线 C 和 C' 都是 Σ 上过 P 点的曲线, 它在 P 点的切向量都是 $\boldsymbol{T}$, 而且 $\kappa_g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T})$ 可看成是 C 在 P 点关于柱面 Σ 的法曲率向量, 所以对柱面 Σ 运用 Meusnier 定理后知道, $\kappa_g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T})$ 亦为 C' 关于柱面 Σ 的法曲率向量, 但是曲线 C' 又可看成柱面 Σ 上过 P 点相应于方向 $\boldsymbol{T}$ 的法截线. 因此 $\kappa_g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T})$ 就是 C' 的曲率向量.

以下推导将给出测地曲率一个内蕴的计算公式, 从而说明测地曲率是曲面的内蕴几何量. 首先, 根据推论 2.1(iii) 得

$$\kappa_g = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}).$$

而

$$\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T})=\left(\boldsymbol{n},\frac{du^1}{ds}\boldsymbol{r}_1+\frac{du^2}{ds}\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1\right)=-\frac{du^2}{ds}|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|,$$

$$\boldsymbol{r}_2\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T})=\left(\boldsymbol{n},\frac{du^1}{ds}\boldsymbol{r}_1+\frac{du^2}{ds}\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_2\right)=-\frac{du^1}{ds}|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|,$$

因此,

$$\kappa_g=\sqrt{g}\begin{vmatrix}\frac{du^1}{ds} & \frac{d^2u^1}{ds^2}+\sum\limits_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^1\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\\ \frac{du^2}{ds} & \frac{d^2u^2}{ds^2}+\sum\limits_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^2\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\end{vmatrix}. \tag{2.5}$$

公式 (2.5) 足以说明测地曲率是内蕴几何量, 从表示形式来说也比较容易记忆. 为了实际计算时的方便, 如果选取曲面 S 上的正交网作为参数曲线网, 则测地曲率能够写成比较简单的表达式, 称为 Liouville 公式. 我们恢复使用 Gauss 的记号, 表述成如下定理.

定理 2.3 (Liouville 公式) 设 (u,v) 是曲面 S 上的正交参数系, C : $u=u(s)$, $v=v(s)$ 是 S 上弧长参数曲线. 假定 C 与 u-曲线正方向的夹角为 θ, 则曲线 C 的测地曲率为

$$\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta. \tag{2.6}$$

证明 由假定, (u,v) 是正交参数系, 且 C 与 u-曲线正方向的夹角为 θ, 可以利用切平面的的标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}\}$ 对 $\boldsymbol{T}$ 进行分解, 得到

$$\boldsymbol{T}=\cos\theta\ \boldsymbol{e}_1+\sin\theta\ \boldsymbol{e}_2, \tag{2.7}$$

此时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}&=(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\times(\cos\theta\ \boldsymbol{e}_1+\sin\theta\ \boldsymbol{e}_2)\\&=\cos\theta\ \boldsymbol{e}_2-\sin\theta\ \boldsymbol{e}_1,\\ \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}&=\cos\theta\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}+\sin\theta\frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds}+(-\sin\theta\ \boldsymbol{e}_1+\cos\theta\ \boldsymbol{e}_2)\frac{d\theta}{ds},\end{aligned} \tag{2.8}$$

将 (2.8) 代入测地曲率的定义式, 直接计算得到

$$\begin{aligned}\kappa_g&=\boldsymbol{e}_2\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}+\frac{d\theta}{ds}\\&=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds}\right).\end{aligned} \tag{2.9}$$

再次利用 $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ 的正交性, 进一步推演得知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v &= (\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)_u-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u)=-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\\ \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v)=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

另外, 将 (2.7) 式与 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds}$ 相比较, 还有

$$\frac{du}{ds}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}},\qquad \frac{dv}{ds}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}. \tag{2.11}$$

最后将 (2.10) 和 (2.11) 代入 (2.9), 简单整理便得 Liouville 公式. □

本节最后, 我们来讨论测地挠率. 由自然标架的运动公式得到

$$\boldsymbol{n}'(s)=\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u^i}\frac{du^i}{ds}=-b_i^j\frac{du^i}{ds}\boldsymbol{r}_j,$$

将其代入测地挠率的定义式, 并如下直接计算:

$$\begin{aligned}\tau_g &= (\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}',\boldsymbol{T})=-b_i^j\frac{du^i}{ds}\frac{du^k}{ds}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{r}_k)\\ &= \left(-b_i^1\frac{du^i}{ds}\frac{du^2}{ds}+b_i^2\frac{du^i}{ds}\frac{du^1}{ds}\right)|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|\\ &= \sqrt{g}\left(-b_2^1\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2+(b_2^2-b_1^1)\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds}+b_i^2\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2\right).\end{aligned}$$

回忆 $b_i^j=g^{jk}b_{ki}$, 并注意到 $\begin{pmatrix}g^{11} & g^{12}\\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{g_{22}}{g} & -\frac{g_{12}}{g}\\ -\frac{g_{12}}{g} & \frac{g_{11}}{g}\end{pmatrix}$, 容易计算得到

$$-b_2^1=\frac{1}{g}\begin{vmatrix}g_{12} & g_{22}\\ b_{12} & b_{22}\end{vmatrix},\qquad b_2^2-b_1^1=\frac{1}{g}\begin{vmatrix}g_{11} & g_{22}\\ b_{11} & b_{22}\end{vmatrix},\qquad b_1^2=\frac{1}{g}\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ b_{11} & b_{12}\end{vmatrix}.$$

因此

$$\tau_g=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 & -\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} & \left(\frac{du^1}{ds}\right)^2\\ g_{11} & g_{12} & g_{22}\\ b_{11} & b_{12} & b_{22}\end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

从测地挠率的计算公式 (2.12) 不难发现下面几个事实:

(1) 测地挠率和法曲率一样, 是曲面上切方向的函数, 反映曲面本身的性质和曲线的性质.

(2) 曲面上在一点处相切的两条曲线在切点处具有相同的测地挠率.

(3) 测地挠率不是曲面的内蕴几何量.

(4) 曲面的主方向恰好是使测地挠率为零的切方向, 因此, 曲面上的曲率线正好是沿其切方向的测地挠率为零的曲线. 换言之, 曲率线的微分方程等价于 $\tau_g = 0$.

习题 4–2

1. 计算曲线 $\boldsymbol{r} = \left(\frac{1}{k}\cos ks, \frac{1}{k}\sin ks, h\right)$ 的曲率, 其中 $0 < h < 1$, $k = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}$. 并求它在单位球面上的切向法曲率及测地曲率, 并验证:

$$\kappa \boldsymbol{N} = \kappa_n \boldsymbol{n} + \kappa_g(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{T}).$$

2. 对正交参数曲线网, 求参数曲线的测地曲率 κ_{g_u} 与 κ_{g_v}, 并验证

(1) Liouville 公式可写成 $\kappa_g = \frac{d\theta}{ds} + \kappa_{g_u}\cos\theta + \kappa_{g_v}\sin\theta$

(2) 曲面的 Gauss 曲率 $K = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}(k_{g_u}\sqrt{E}) - \frac{\partial}{\partial u}(k_{g_v}\sqrt{G})\right]$.

【证明】 当坐标曲线构成正交网时, 由计算测地曲率的 Liouville 公式, 对 u-曲线, $\theta = 0$, 则 $\kappa_{g_u} = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}$. 而对 v-曲线, $\theta = \frac{\pi}{2}$, 则 $\kappa_{g_v} = \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}$. 有了这些公式, 题目的结论都是容易验证的.

3. 设 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 是曲面 S 在点 p 的两个彼此正交的主方向, 其对应的主曲率是 κ_1, κ_2. 证明: 曲面 S 在点 p 处沿与 $\boldsymbol{e}_1$ 成 θ 角的切方向的测地挠率是

$$\tau_g = \frac{1}{2}(\kappa_2 - \kappa_1)\sin 2\theta = \frac{1}{2}\frac{d\kappa_n(\theta)}{d\theta}.$$

4. 证明: $\kappa_n^2 + \tau_g^2 - 2H\kappa_n + K = 0$