第 4 章

曲面的内蕴几何

根据第二章的讨论, 只要知道曲面 S 的第一基本形式 I, 就可以在 S 上计算弧长、角度和面积. 另外, 由第三章的Gauss定理, 反映曲面弯曲的Gauss曲率也仅由第一基本形式决定. 这些都预示着曲面的度量蕴涵着曲面的几何. 我们把仅由第一基本形式决定的几何称为**曲面的内蕴几何学**. 本章将继续研究曲面的内蕴几何, 主要内容包括: 曲面上协变微分的概念; 曲面上的测地线和平行移动, Gauss-Bonnet 公式等.

在展开本章具体内容之前, 让我们再来回顾一次关于曲面的讨论历程, 以加深对“内蕴”一词的准确理解. 事实上, 关于曲面的讨论我们的**出发点**是将曲面 S “放在” $\mathbb{R}^3$ 中, 看成 $\mathbb{R}^3$ 的子集, 即给出曲面 S 的一种正则参数表示 $\boldsymbol{r}(u,v)$, 于是便可以定义 S 上的单位法向量场

$$\boldsymbol{n}(u,v)=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\quad \text{或}\quad -\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}.$$

当选定一个单位法向量场 $\boldsymbol{n}(u,v)$ 之后, 利用 $\mathbb{R}^3$ 中标准内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 便可以定义第一基本形式 $I=\langle d\boldsymbol{r},d\boldsymbol{r}\rangle$, 第二基本形式 $I\!I=-\langle d\boldsymbol{r},d\boldsymbol{n}\rangle$, 由此展开对曲面 S 的讨论. 如果我们忽略将曲面 S “放在” $\mathbb{R}^3$ 中这一大前提, 并合适地给出抽象曲面及第一基本形式的定义, 然后再展开讨论. 这种做法完全摆脱了 $\mathbb{R}^3$, 就曲面 S 本身进行讨论, 这是高观点下“内蕴”一词的含义, 也正是Riemann几何的基本点.

4.1 曲面的等距变换

熟知曲面的第一基本形式和第二基本形式是 $\mathbb{R}^3$ 的合同变换群下的不变量, 由此可见, 前两章研究的正是曲面在 $\mathbb{R}^3$ 的合同变换群下的不变量或不变性质. 而当我们研究仅由第一基本形式所决定的内蕴几何时, 我们可以在一

类更广泛的变换群— 等距变换群下进行. 本节将给出曲面的等距变换的定义, 并讨论其基本性质.

设 $f: S \to S^*$ 是两张曲面间的一个1:1对应. 若 f 保持 S 与 S^* 上任意对应曲线(段)的弧长不变, 则称 f 是曲面 S 到曲面 S^* 上的一个**等距变换** 或**等距对应**, 这时称曲面 S 与 S^* **等距等价**.

显然, $\mathbb{R}^3$ 的欧氏运动是等距变换, 但曲面之间的等距变换不一定就是欧氏运动, 也就是说两个等距等价的曲面不一定是合同的. 例如, 把一张纸卷成圆筒, 圆筒与铺平的纸当然是等距的, 但它们不能通过欧氏运动叠合到一起.

合同的两个曲面具有相同的内在和外在几何, 但明显地不能寄希望等距等价的两个曲面具有相同的外在几何, 如平面与柱面. 不过, 下面定理告诉我们, 等距等价的两个曲面具有相同的内在几何.

定理 1.1 两个 C^k 曲面之间的一个 C^k 微分同胚是等距微分同胚 $\Longleftrightarrow$ 经过适当的参数选择后, 两个曲面具有相同的第一基本形式.

证明 设 C^k 曲面 S 与 S^* 之间的一个微分同胚是等距的, 而且在对应点取相同的参数[1], 则曲面 S 上任意一条曲线 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))(a \le t \le b)$ 和曲面 S^* 上的对应曲线 $\boldsymbol{r}^*(t)=\boldsymbol{r}^*(u(t),v(t))(a \le t \le b)$ 应当有相同的长度, 即对于任意 a、b $(a<b)$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\;dt\\
=&\int_a^b \sqrt{E^*\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F^*\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G^*\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\;dt,
\end{aligned}$$

那么对于这两个曲面的一对对应点, 有

$$E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=E^*\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F^*\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G^*\left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

[1] 曲面 S^* 在参数变换(1.1)式下的参数方程为 $\boldsymbol{r}^*(u^*,v^*)=\boldsymbol{r}^*(u^*(u,v),v^*(u,v))$, 我们把 (u,v) 作为 S^* 的新参数. 那么 S 与 S^* 的对应点就有相同的参数值 (u,v), 即 $P(u,v)\to P^*(u^*(u,v),v^*(u,v))$. 因此, 这时候曲面 S 与 S^* 上对应曲线就有相同的参数方程 $u=u(t), v=v(t)$ (当然在空间中方程不同), 因此在对应点, 对应方向可以用相同的微分 $du:dv$ 来表示.

这是关于 E, F, G; E^*, F^*, G^*; $(du : dv)$ 的恒等式, 所以

$$E = E^*, \quad F = F^*, \quad G = G^*.$$

必要性得到证明, 充分性是显然的.

推论 1.2 等距等价的两个曲面, 在对应点具有相同的Gauss曲率(逆命题不成立, 我们将在本章第四节给予证明).

当我们把平面卷成圆柱面时, 平面上的直线在圆柱面上的像通常不再是直线, 即曲面上一条曲线的曲率在等距微分同胚下是要改变的. 由此可见, 曲面上确实存在一部分几何性质或几何量是不能由第一基本型完全确定, 即不是内蕴量或内蕴性质, 它们被称为曲面的外在量或外在性质.

定理 1.3 可展曲面与平面局部等距等价, 反之, 与平面等距等价的曲面必为可展曲面. 从而可展曲面的又一特征是与平面等距等价.

证明 由于可展曲面局部地或为柱面, 或为锥面, 或为某空间曲线的切线曲面, 所以我们只需要分别证明这三种曲面都与平面等距等价即可.

(1) *平面与柱面* 在直角坐标系下, 平面 $S : \boldsymbol{r}(u, v) = \{u, v, 0\}$ 的第一基本型为 $I_S = du^2 + dv^2$. 以与直母线垂直的曲线 $\boldsymbol{a}(s)$ 为导线, $\boldsymbol{b}_0$ 为直母线上单位矢量的柱面 S^* 的参数方程为 $S^* : \boldsymbol{r}^*(s, \lambda) = \boldsymbol{a}(s) + \lambda \boldsymbol{b}_0$, 它的第一基本形式是 $I_{S^*} = ds^2 + d\lambda^2$. 显然在参数对应 $\lambda = u$, $s = v$ 下, $I_S = I_{S^*}$, 因此柱面确实与平面等距等价.

(2) *平面与锥面* 令 $\boldsymbol{r}(\rho, \theta) = \{\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0\}$, 这是平面 S 在极坐标系下的参数方程, 它的第一基本形式是 $I_S = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2$. 以 $\boldsymbol{a}_0$ 为顶点, $\boldsymbol{b}(s)$ 为直母线上的单位矢量的锥面 S^* 的参数方程可写成 $S^* : \boldsymbol{r}^*(s, \lambda) = \boldsymbol{a}_0 + \lambda \boldsymbol{b}(s)$, 其中 s 为单位球面曲线 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(s)$ 的弧长, 则它的第一基本形式是 $I_{S^*} = \lambda^2 ds^2 + d\lambda^2$. 显见参数对应 $\lambda = \rho$, $s = \theta$ 是等距对应, 因此锥面确实与平面等距等价.

(3) *平面与空间曲线的切线面* 设 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 是一条以弧长 s 为参数的空间挠曲线, 则 C 的切线面 S 具有参数表示 $\boldsymbol{r}(s, v) = \boldsymbol{r}(s) + v\boldsymbol{\alpha}(s)$, 它的第一基本形式为 $I_S = (1 + v^2k^2)ds^2 + 2dsdv + dv^2$, 其中 $k = k(s)$ 为曲线 C 的曲率函数. 不难发现, I_S 与曲线 C 的挠率无关. 因此可用 $k^* = k(s)$ 作为已知

函数, 构造一条平面曲线 C^* 使其曲率正好是 $k(s)$. 这样以来, C^* 的切线面 S^* 与 C 的切线面 S 具有相同的第一基本形式. 但 S^* 是平面(或平面的一部分), 所以切线面 S 可以与平面等距等价.

最后, 设一曲面 S 与平面等距等价, 由推论 1.2, S 的 Gauss 曲率处处为零, 从而该曲面必为可展曲面. □

由于等距变换保持曲面的第一基本形式, 它亦保持曲面上两条相交曲线在交点处的夹角不变. 两个曲面 S 和 S^* 之间的 1:1 对应, 如果仅保持任意两条相交曲线在交点处的夹角不变, 则称为曲面的**保角变换**.

保角变换是比等距变换更广泛的一类变换, 保角变换不再保持曲面的第一基本形式. 但我们有

定理 1.4 两个 C^k 曲面 S 和 S^* 之间的一个 C^k 微分同胚是共形微分同胚 $\Longleftrightarrow$ 经过适当的参数选择后, 两个曲面的第一基本形式成比例, 即 $I_S = \lambda^2\, I,\quad (\lambda \neq 0)$.

证明 充分性是显然的. 至于必要性, 由于共形对应保持两条曲线的正交性不变, 所以从公式

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0,$$

得到

$$E^*du\delta u + F^*(du\delta v + dv\delta u) + G^*dv\delta v = 0,$$

消去 δu、δv, 便得

$$\frac{Edu + Fdv}{E^*du + F^*dv} = \frac{Fdu + Gdv}{F^*du + G^*dv}.$$

由于 du 和 dv 的任意性, 我们得到

$$E : F : G = E^* : F^* : G^*.$$

定理 1.5 任何曲面局部必与平面共形对应[2]. 因此, 曲面上总存在局部参数 (u, v), 使曲面的第一基本型表现为 $I = \lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2)$. 这样的参数 (u, v) 被称为**等温参数**.

[2]证明超出了本书的范围, 参见Chern S. S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. Proc. of AMS, 1955(6); 771-782.

习题 4–1

1. 证明第一类基本量 E, F, G 为常数的曲面和平面等距等价.

【证明】 设曲面 S 的第一基本形式为 $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, 其中 E, F, G 为常数(即与参数无关). 对第一基本形进行适当变形

$$\begin{aligned} I &= \left(\sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv\right)^2 + \left(G - \frac{F^2}{E}\right)dv^2 \\ &= \left(\sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}dv\right)^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

令

$$\begin{cases} x = \sqrt{E}\,u + \frac{F}{\sqrt{E}}\,v, \\ y = \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}\,v, \end{cases} \tag{1.2}$$

则

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{E} & \frac{F}{\sqrt{E}} \\ 0 & \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}} \end{vmatrix} = \sqrt{EG-F^2} > 0.$$

所以参数变换 (1.2) 为容许的参数变换, 由 (1.2) 得

$$\begin{cases} dx = \sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv, \\ dy = \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}\,dv, \end{cases}$$

代入 (1.1) 知 $I = dx^2 + dy^2$, 与平面的第一基本形相同, 即曲面 S 与平面等距等价.

2. 若曲面上有直线, 试证明这样的曲面不可能与球面等距等价.

【证明】 由于直线的法曲率为零, 根据 Euler 公式知, 沿直线曲面的 Gauss 曲率 $K = k_1 \cdot k_2 \le 0$. 而球面的 Gauss 曲率恒为正, 因此, 含有直线的曲面不可能与球面等距等价.

3. 已知曲面 S 的 Gauss 曲率为 K, 求与 S 共形对应的曲面 S^* 的 Gauss 曲率.

【解】 根据定理 1.5, 在曲面 S 上, 选取局部等温参数 (u, v), 于是有

$$I_S = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2),$$

这里 $\lambda(u, v)$ 是 u, v 的正 C^∞ 函数. 又设在共形对应下, 曲面 S^* 的第一基本型为 $e^{2f} I_S$, 这里 f 是曲面 S 上的函数. 于是, 由 Gauss 方程, 我们得到 S^* 的Gauss曲率

$$K^* = -\frac{1}{2e^{2f}\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\ln(e^{2f}\lambda),$$

由于
$$\ln(e^{2f}\lambda)=2f+\ln\lambda,\quad K=-\frac{1}{2\lambda}(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2})\ln\lambda,$$
因此
$$K^*=-e^{-2f}(\Delta_S f-K),$$
这里Δ_S为曲面S的Laplace算子, 且$\Delta_S f=\frac{1}{\lambda}(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2})f$.

本题的反问题是: 在一个已知曲面上任给一个C^∞函数K^*, 能否找到上述C^∞函数f, 使得
$$\Delta_S f-K+e^{2f}K^*=0,$$
这就是微分几何中有名的Yamabe问题的一个特殊情况, 六十年代后期开始, 微分几何学家经过艰苦工作, 这类问题目前已基本解决.

4. 证明球极投影给出球面(除北极外)到平面的一个共形对应.

【证明】 取如图所示的一个空间直角坐标系和参数u,v, 则球面与平面上的对应点$P(x,y,z)$和$P^*(x^*,y^*,0)$有如下关系式
$$x=OQ\cos v=2R\sin u\cos u\cos v,$$
$$y=OQ\sin v=2R\sin u\cos u\sin v,$$
$$z=PQ=OP\sin u=2R\sin^2 u.$$

$$x^*=OP^*\cos v=2R\tan u\cos v,$$
$$y^*=OP^*\sin v=2R\tan u\sin v,$$
这里R是球面半径. 容易计算球面和平面在上述参数表示下的第一基本形式分别为
$$I_{球面}=4R^2(du^2+\sin^2 u\cos^2 udv^2),$$
$$I_{平面}=\frac{4R^2}{\cos^4 u}(du^2+\sin^2 u\cos^2 udv^2).$$

球面(除北极外)的常用的等温参数向量表示是
$$\boldsymbol{r}(u,v)=\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right).$$
第一基本形式是
$$I=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}(du^2+dv^2).$$

历史上, 球面和平面的共形对应还有另一种方法, 如用经纬度(u,v)作为球面的参数, 则单位球面(除南北极外)的方程为$\boldsymbol{r}(u,v)=\{\cos v\cos u,\cos v\sin u,\sin v\}$,

且

$$I = ds^2 = \cos^2 v\, du^2 + dv^2,$$

令 $u = x, v = f(y)$, 这里 C^∞ 函数 $f(y)$ 为待定函数, 于是

$$I = \cos^2(f(y))\, dx^2 + (f'(y))^2\, dy^2,$$

如果找一个 $f(y)$, 使得 $f'(y) = \cos f(y)$, 则

$$I = \cos^2(f(y))(dx^2 + dy^2),$$

球面就与平面共形对应.

从 $\frac{df}{\cos f} = dy$ 可得一解

$$y = \int \frac{df}{\cos f} = \ln|\tan(\frac{f}{2} + \frac{\pi}{4})| + C.$$

绘制麦卡托 (Mercator) 地图的方法是用上式把地球上经纬度 (u, v) 的点画在平面上直角坐标为 (x, y) 的点处, 这时子午线与 y-轴的平行线对应, 纬圆与 x-轴的平行线对应.