3.4 曲面的存在惟一性定理

本节将应用前面已经得到的曲面自然标架的运动方程和曲面的结构方程, 证明曲面的存在惟一性定理—即曲面论的基本定理. 这与曲线论的基本定理相类似. 曲线由曲率和挠率确定, 而曲面由第一、第二基本形式确定.

定理 4.1 (惟一性定理) 设 $S_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ 和 $S_2 : \tilde{\boldsymbol{r}} = \tilde{\boldsymbol{r}}(u^1, u^2)$ 是定义在同一参数区域 D 上的两张曲面, 如果对 $\forall\ (u^1, u^2) \in D$, S_1 和 S_2 在点 (u^1, u^2) 具有相同的第一基本形式和第二基本形式, 则 S_1 和 S_2 相差一个 $\mathbb{R}^3$ 的刚体运动.

证明 由于两曲面上采用同一组参数, 因此在每一点 (u^1, u^2) 处曲面 S_1 和 S_2 都有相同的第一基本形式和第二基本形式意指它们在每一点都有相同的第一和第二类基本量. 于是, 任取一点 $(u_0^1, u_0^2) \in D$, 便有 $|\boldsymbol{r}_i(u_0^1, u_0^2)| = |\tilde{\boldsymbol{r}}_i(u_0^1, u_0^2)|$, $i = 1, 2$, $\langle \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \rangle(u_0^1, u_0^2) = \langle \tilde{\boldsymbol{r}}_1, \tilde{\boldsymbol{r}}_2 \rangle(u_0^1, u_0^2)$, 而且 $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}\}$ 与 $\{\tilde{\boldsymbol{r}}_1, \tilde{\boldsymbol{r}}_2, \tilde{\boldsymbol{n}}\}$ 均是正定向的. 一次经过一个适当的刚体运动 $\mathcal{T}$ 后, 我们不妨设 S_1 和 S_2 的自然标架在点 (u_0^1, u_0^2) 重合, 即

$$\{\boldsymbol{r}(u_0^1, u_0^2); \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}\} = \mathcal{T}\{\tilde{\boldsymbol{r}}(u_0^1, u_0^2); \tilde{\boldsymbol{r}}_1, \tilde{\boldsymbol{r}}_2, \tilde{\boldsymbol{n}}\}. \tag{4.1}$$

现在的结论是: 曲面 S_1 和 $\mathcal{T}(S_2)$ 在所有对应于同一参数值的点有相同的第一类基本量和第二类基本量, 即它们的自然标架满足同一组偏微分方程组, 而且在点 (u_0^1, u_0^2) 具有相同的自然标架. 剩下需要证明的是 S_1 和 $\mathcal{T}(S_2)$ 的自然标架处处重合. 由于曲面的运动方程是关于 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}\}$ 的一阶线性偏微分方程组, 由一阶线性偏微分方程组关于初值问题解的惟一性及 (4.1) 可得 $\boldsymbol{r} = \tilde{\boldsymbol{r}}$. □

定理 4.2 (存在性定理) 在单连通区域 D 内给出了关于参数 (u^1, u^2) 的六个函数 g_{ij} 与 b_{ij}, $(i, j = 1, 2)$, 它们关于 i, j 对称, 且矩阵 (g_{ij}) 是正定的, 同时它们满足 Gauss-Codazzi 方程, 则在任意一点 $(u_0^1, u_0^2) \in D$, 必有它的一个邻域 U 以及定义在 U 上的一个正则参数曲面 S : $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$, 它的第一和第二基本形式恰为 $\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij} du^i du^j$ 和 $\sum\limits_{i,j=1}^{2} b_{ij} du^i du^j$.

证明 考虑以 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{n}$ 为未知函数的一阶偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} = \boldsymbol{r}_i, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^j} = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{r}_k + b_{ij}\boldsymbol{n}, \quad i, j = 1, 2, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^i} = -b^k_i \boldsymbol{r}_k. \end{cases} \tag{4.2}$$

求解上述方程组本质上是求解曲面标架的运动方程. 由一阶线性偏微分方程理论, 方程组 (4.2) 有解的充分必要条件是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u^j}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}\right) = \dfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial u^k}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^j}\right) = \dfrac{\partial}{\partial u^j}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^k}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial u^j}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^i}\right) = \dfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^j}\right), \end{cases} \tag{4.3}$$

由第三节的讨论可知, 条件 (4.3) 成立等价于 Gauss 方程和 Codazzi 方程, 因此由定理的条件知方程组 (4.2) 是可解的. 也就是说, 给定一点 $(u^1_0, u^2_0) \in D$ 及初值 $\boldsymbol{r}^0$, $\boldsymbol{r}^0_i$, $\boldsymbol{n}^0$, 存在点 (u^1_0, u^2_0) 的邻域 U 及定义在 U 上的函数 $\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$, $\boldsymbol{r}_i(u^1, u^2), \boldsymbol{n}(u^1, u^2)$ 满足方程组 (4.2) 和初值条件

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}(u^1_0, u^2_0) = \boldsymbol{r}^0, \\ \boldsymbol{r}_i(u^1_0, u^2_0) = \boldsymbol{r}^0_i, \\ \boldsymbol{n}(u^1_0, u^2_0) = \boldsymbol{n}^0. \end{cases} \tag{4.4}$$

现取初值 $\boldsymbol{r}^0$, $\boldsymbol{r}^0_i$, $\boldsymbol{n}^0$ 满足

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{r}^0_i, \boldsymbol{r}^0_j \rangle = g_{ij}(u^1_0, u^2_0), \\ \langle \boldsymbol{r}^0_i, \boldsymbol{n}^0 \rangle = 0, \\ \langle \boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{n}^0 \rangle = 1, \quad (\boldsymbol{r}^0_1, \boldsymbol{r}^0_2, \boldsymbol{n}^0) > 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

以下证明方程组 (4.2) 的解, 其初值条件满足 (4.5) 时, 是所求的曲面.

考虑 U 上的函数 $\langle \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j \rangle$, $\langle \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{n} \rangle$, $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle$, 由 (4.2) 式可以推知它们满足

如下一阶线性偏微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial\langle \boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j\rangle}{\partial u^k} = & \Gamma^l_{ik}\langle \boldsymbol{r}_l,\boldsymbol{r}_j\rangle + \Gamma^l_{jk}\langle \boldsymbol{r}_l,\boldsymbol{r}_i\rangle \\ & +b_{ik}\langle \boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{n}\rangle + b_{jk}\langle \boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{n}\rangle, \\ \frac{\partial\langle \boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{n}\rangle}{\partial u^j} = & \Gamma^l_{ij}\langle \boldsymbol{r}_l,\boldsymbol{n}\rangle + b_{ij}\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\rangle - b^k_j\langle \boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_k\rangle, \\ \frac{\partial\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\rangle}{\partial u^i} = & -2b^j_i\langle \boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{n}\rangle. \end{cases} \tag{4.6}$$

显然 $\langle \boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j\rangle = g_{ij}$, $\langle \boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{n}\rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\rangle = 1$ 是方程组 (4.6) 的一组解. 由初值条件 (4.5) 以及一阶线性偏微分方程组关于初值问题解的惟一性可知

$$\langle \boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j\rangle \equiv g_{ij}, \quad \langle \boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{n}\rangle \equiv 0, \quad \langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\rangle \equiv 1.$$

因此 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一张参数曲面, 以 $\sum g_{ij}du^idu^j$ 为第一基本形式. 由于 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 垂直, 解的连续性以及 $(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n})(u^1_0,u^2_0) > 0$, 保证了 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}$ 是正定的. 因此 $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|}$. 由方程组 (4.2) 的第二式知 $\sum b_{ij}du^idu^j = \sum\langle \boldsymbol{r}_{ij},\boldsymbol{n}\rangle du^idu^j$ 是该曲面的第二基本形式. □

基本定理告诉我们, 若空间中两个曲面 S_1 与 S_2 在对应点有相同的第一和第二基本形式, 那么经过一个刚体运动一定可以把 S_1 和 S_2 重合起来, 换言之, 这两个曲面的形状完全相同. 所以我们说**曲面的形状完全由它的第一和第二基本形式所决定**, 这就回答了本节最初提出的问题.

最后我们强调以下, 自然标架的运动方程是一个一阶线性偏微分方程组, 而结构方程(即 Gauss 方程和 Codazzi 方程) 实质上是这个偏微分方程组的可积性条件.

【例3】 已知 $E=1,\ F=0,\ G=\sin^2 u; L=1,\ M=0,\ N=\sin^2 u$, 其中 $0<u<\pi$, 求该曲面.

【解】

习题 3–4

1. 判断下面给出的二次微分式 ϕ, ψ 能否作为 $\mathbf{R}^3$ 中一张曲面的第一基本形式和第二基本形式? 说明理由.

(1) $\phi = du^2 + dv^2, \quad \psi = du^2 - dv^2;$

(2) $\phi = du^2 + \cos^2 u\, dv^2, \quad \psi = \cos^2 u\, du^2 + dv^2.$

2. 求曲面 S 的参数方程, 使得它的第一基本形式和第二基本形式分别为

$$I = (1+u^2)du^2 + u^2\, dv^2, \quad II = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, du^2 + u^2\, dv^2.$$