3.3 曲面的结构方程

现在我们利用曲面的运动方程来研究曲面的第一、第二基本形式系数之间的关系. 设C^k阶$(k \geq 2)$曲面S的方程为$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$, 则曲面的基本公式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{ij} = \sum \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + b_{ij} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}_j = -\sum b_j^k \boldsymbol{r}_k, \quad (b_j^k = \sum g^{kl} b_{lj}), \end{cases} \tag{3.1}$$

对向量$\boldsymbol{r}_i$运用二阶连续偏导数可交换次序的法则, 必须成立

$$\boldsymbol{r}_{ijl} = \boldsymbol{r}_{ilj},$$

因此必须有

$$\begin{aligned} &\sum \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \boldsymbol{r}_k + \sum \Gamma_{ij}^k \left(\sum \Gamma_{kl}^m \boldsymbol{r}_m + b_{kl} \boldsymbol{n}\right) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^l} \boldsymbol{n} + b_{ij}\left(-\sum b_l^k \boldsymbol{r}_k\right) \\ = &\sum \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial u^j} \boldsymbol{r}_k + \sum \Gamma_{il}^k \left(\sum \Gamma_{kl}^m \boldsymbol{r}_m + b_{kj} \boldsymbol{n}\right) + \frac{\partial b_{il}}{\partial u^j} \boldsymbol{n} + b_{il}\left(-\sum b_j^k \boldsymbol{r}_k\right), \end{aligned}$$

利用$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}$是线性无关就得出

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial u^j} + \sum \Gamma_{ij}^m \Gamma_{ml}^k - \sum \Gamma_{il}^m \Gamma_{mj}^k = (b_{ij} b_j^k - b_{il} b_j^k), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^l} - \frac{\partial b_{il}}{\partial u^j} + \sum \Gamma_{ij}^m b_{ml} - \sum \Gamma_{il}^m b_{mj} = 0, \tag{3.3}$$

因此曲面S的第一, 第二基本形式系数g_{ij}、b_{ij}必须满足(3.2), (3.3)两式, 我们称这两组方程为**曲面的基本方程**, 其中(3.2)式称为**Gauss方程**, (3.3)式称为**Codazzi方程**, 合称为**Gauss-Codazzi方程**, 或称为曲面的**结构方程**.

当然我们从$\boldsymbol{n}_{ji} = \boldsymbol{n}_{ij}$, 也可以推出第一, 第二基本形式系数所满足的关系式, 但可以证明由$\boldsymbol{n}_{ij} = \boldsymbol{n}_{ji}$得出的关系式可由Codazzi方程推出, 因此得不出新的关系式了. 参阅苏步青等著《微分几何》$P_{125-126}$.

在(3.2)和(3.3)中, 由于$i, j, k, l = 1, 2$, 所以Gauss方程和Codazzi方程是两组方程, 这两组方程形式上很复杂, 但实质上, Gauss方程中只有一个独立的方程, 而Codazzi方程中有两个独立的方程, 下面我们分别给予说明.

- **Codazzi方程** $\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^l}-\frac{\partial b_{il}}{\partial u^j}+\sum\Gamma_{ij}^m b_{ml}-\sum\Gamma_{il}^m b_{mj}=0$

显然当$j=l$时, Codazzi方程为恒等式, 而且当j与l对调时, Codazzi方程不变. 故可令$j=1,l=2$, 则

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1}+\sum\Gamma_{i1}^m b_{m2}-\sum\Gamma_{i2}^m b_{m1}=0,$$

当$i=1$时,

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}+\sum\Gamma_{11}^m b_{m2}-\sum\Gamma_{12}^m b_{m1}=0, \tag{3.4}$$

当$i=2$时,

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}+\sum\Gamma_{21}^m b_{m2}-\sum\Gamma_{22}^m b_{m1}=0, \tag{3.5}$$

这说明Codazzi方程包含两个独立的关系式.

- **Gauss方程** 为考察高斯方程中独立关系式的个数, 我们先引进记号, 令

$$R_{ijl}^k=\frac{\partial\Gamma_{ij}^k}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma_{il}^k}{\partial u^j}+\sum\Gamma_{ij}^m\Gamma_{ml}^k-\sum\Gamma_{il}^m\Gamma_{mj}^k$$

称R_{ijl}^k为第二类黎曼曲率张量. 显然$R_{ijl}^k=-R_{ilj}^k$, 因此$R_{ijl}^k+R_{jli}^k+R_{lij}^k=0$. 再定义

$$R_{mijk}=\sum_{l=1}^2 g_{ml}R_{ijk}^l,$$

称R_{mijk}为第一类黎曼曲率张量. 容易验证如下恒等式

$$R_{ijkl}=R_{klij},\quad R_{ijkl}=-R_{ijlk},\quad R_{ijkl}=-R_{jikl},$$

$$R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0.$$

因此黎曼曲率张量的16个分量中只有一个独立分量, 即

$$R_{1212}=R_{2121}=-R_{1221}=-R_{2112},$$

其余都是零, 故高斯方程中只有一个独立的关系式, 即是

$$R_{1212}=b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22}.$$

总结上述讨论我们得出: **第一、第二类基本量之间满足三个关系式**, 即

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}+\sum\Gamma_{11}^m b_{m2}-\sum\Gamma_{12}^m b_{m1}=0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}+\sum\Gamma_{21}^m b_{m2}-\sum\Gamma_{22}^m b_{m1}=0, \tag{3.7}$$

$$R_{1212}=R_{2121}=-R_{1221}=-R_{2112}. \tag{3.8}$$

定理 3.1 (高斯绝妙定理) 曲面的高斯曲率是内蕴量.

证明 $K=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=-\frac{R_{1212}}{g}$. □

值得注意的是, 我们定义高斯曲率K为主曲率k_1和k_2的乘积, 这涉及到曲面的第二基本形式系数, 所以表面上看K不是内蕴量, 但上述定理表明Gauss曲率K实质上仅由曲面的度量性质可决定, 即K是一个内蕴几何量, 这正是定理的绝妙所在.

最后, 我们再一次回到Gauss记号, 当选正交曲线网作参数曲线网时, Gauss方程可简化为

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v+\left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\}=\frac{LN-M^2}{EG}, \tag{3.9}$$

而Codazzi方程可简化为

$$\begin{cases}\left(\frac{L}{\sqrt{E}}\right)_v-\left(\frac{M}{\sqrt{E}}\right)_u-N\frac{(\sqrt{E})_v}{G}-M\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}=0,\\ \left(\frac{N}{\sqrt{G}}\right)_u-\left(\frac{M}{\sqrt{G}}\right)_v-L\frac{(\sqrt{G})_u}{E}-M\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}=0.\end{cases} \tag{3.10}$$

习题 3–3

1. 设曲面的第一基本形式为$I=\lambda^2(du^2+dv^2)$, 其中λ是(u,v)的函数. 证明曲面的高斯曲率

$$K=-\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln\lambda+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\ln\lambda\right).$$

2. 已知曲面的第一基本形式如下(其中a均为常数),求它们的高斯曲率.

(1) $I=\frac{du^2+dv^2}{\left(1+\frac{c}{4}(u^2+v^2)\right)^2}$;

(2) $I = du^2 + e^{\frac{2u}{a}}\, dv^2$.

3. 证明: 平均曲率为常数的曲面或为全脐点曲面, 或者它的第一、第二基本形式可以表现为

$$I = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2),$$
$$II = (1+\lambda H)du^2 + (1-\lambda H)dv^2. \quad \lambda > 0$$

【证明】 首先选取局部正交参数曲线网作为曲率线网, 因此 $F = M = 0$, 而且 $k_1 = L/E,\ k_2 = N/G,\ k_1 + k_2 = 2H$. 将其代入 (3.10) 式, 这时 Codazzi 方程简化为

$$\left(\frac{L}{\sqrt{E}}\right)_v - k_2(\sqrt{E})_v = 0, \tag{3.11}$$

$$\left(\frac{N}{\sqrt{G}}\right)_u - k_1(\sqrt{G})_u = 0, \tag{3.12}$$

直接计算便可得到

$$L_v = HE_v, \quad N_u = HG_u,$$

由于 H 是常数, 分别积分以上两式两端, 我们有

$$L = HE + \phi(u), \quad N = HG + \psi(v), \tag{3.13}$$

这里 $\phi(u)$ 和 $\psi(v)$ 是分别依赖于 u 和 v 的连续可微函数. 利用 (3.13) 可直接验证成立下式

$$\frac{\phi(u)}{E} = -\frac{\psi(v)}{G}, \tag{3.14}$$

情形 1 若 (3.14) 式比值为零, 则 $\phi(u) = \psi(v) = 0$, 由 (3.13), 曲面为全脐点曲面.

情形 2 若 (3.14) 式比值不为零, 这时, 曲面上无脐点, 这时两个主曲率 $k_1 \neq k_2$, 不妨设 $k_1 > k_2$, 那么, 从 (3.13) 式可以得到

$$\begin{aligned}\phi(u) &= L - HE = k_1E - \frac{1}{2}(k_1+k_2)E \\ &= \frac{1}{2}(k_1 - k_2)E > 0,\end{aligned}$$

类似地有

$$\psi(v) = \frac{1}{2}(k_2 - k_1)G < 0,$$

进而, 存在正函数 $\rho(u,v)$ 使得

$$\frac{\phi(u)}{E} = -\frac{\psi(v)}{G} = \frac{1}{\rho(u,v)}, \tag{3.15}$$

于是

$$E=\phi(u)\rho(u,v),\quad G=-\psi(v)\rho(u,v).$$

令

$$\bar{u}=\int\sqrt{\phi(u)}\,du,\quad \bar{v}=\int\sqrt{-\psi(v)}\,dv,$$

则

$$d\bar{u}=\sqrt{\phi(u)}\,du,\quad d\bar{v}=\sqrt{-\psi(v)}\,dv,$$
$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}=\sqrt{\phi(u)}\sqrt{-\psi(v)}>0,$$

因而, $\bar{u},\bar{v}$ 可以作为曲面的新参数, 这时 $\rho(u,v)=\lambda(\bar{u},\bar{v})$, 且曲面的第一基本形式是

$$\begin{aligned} I &= Edu^2+Gdv^2\\ &=\rho(u,v)[\phi(u)du^2-\psi(v)dv^2]\\ &=\lambda(\bar{u},\bar{v})[d\bar{u}^2+d\bar{v}^2]. \end{aligned}\tag{3.16}$$

曲面的第二基本形式是

$$\begin{aligned} I\!I &= Ldu^2+Ndv^2\\ &=[HE+\phi(u)]du^2+[HG+\psi(v)]dv^2\\ &=[H\rho(u)+1][\sqrt{\phi(u)}du]^2+[H\rho(u)-1][\sqrt{-\psi(v)}dv]^2\\ &=[H\lambda(\bar{u},\bar{v})+1]d\bar{u}^2+[H\lambda(\bar{u},\bar{v})-1]d\bar{v}^2, \end{aligned}\tag{3.17}$$

仍用 u,v 代替 (3.16) 和 (3.17) 中的 $\bar{u},\bar{v}$, 结论得证.

4. 设曲面的第一基本形式是 $E\,du^2+2F\,dudv+G\,dv^2$. 证明它的 Gauss 曲率具有如下表达式

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix} -\frac{G_{uu}}{2}+F_{uv}-\frac{E_{vv}}{2} & \frac{E_u}{2} & F_u-\frac{E_v}{2}\\ F_v-\frac{G_u}{2} & E & F\\ \frac{G_v}{2} & F & G \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2}\\ \frac{E_v}{2} & E & F\\ \frac{G_u}{2} & F & G \end{vmatrix}\right)$$