3.2 自然标架下的运动方程

在参数曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$上每一点$\boldsymbol{r}(u,v)$已经引进了三个不共面的矢量$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}$, 即有自然标架$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}\}$. 继上一节描绘的活动标架法的思想, 我们需要对自然标架进行微商. 但是, 由于矢量$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$一般不是单位矢量, 也不垂直, 也由于一般不能找到参数u,v像曲线弧长那样具有普遍的不变意义, 如果我们仍然沿用Gauss的记号, 所得到的公式是比较复杂而难以运用的. 为此我们引进张量记号.

Gauss记号	张量记号
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$,	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$
$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u,v)$,	$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u^1,u^2)$
$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v;\quad \boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_{vv}$	$\boldsymbol{r}_i(i=1,2);\quad \boldsymbol{r}_{ij}(1\le i,j\le 2)$
$\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{n}_v$,	$\boldsymbol{n}_i(i=1,2)$
$E,F,G;\quad L,M,N$,	$g_{11},g_{12},g_{22};\quad b_{11},b_{12},b_{22}$
$EG-F^2$,	$g_{11}g_{22}-g_{12}^2\equiv g$
$LN-M^2$,	$b_{11}b_{22}-b_{12}^2\equiv b$
$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv$,	$d\boldsymbol{r}=\sum\limits_{i=1}^{2}\boldsymbol{r}_i du^i$
$\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\lvert\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\rvert}$,	$\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{g}}$
$I=(d\boldsymbol{r})^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$,	$I=(d\boldsymbol{r})^2=\sum\limits_{i,j=1}^{2}g_{ij}du^idu^j$
$II=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$,	$II=\sum\limits_{i,j=1}^{2}b_{ij}du^idu^j$

为了书写方便, 我们将采用Einstein求和约定: 在一个单项式中, 若一个指标字母(以$i,j,\cdots$或$\alpha,\beta,\cdots$表示)作为上标和下标各出现一次, 则该式就表示对这个指标字母从1到2的求和式, 而上下指标多对重复出现就表示该式是多重求和式, 这样我们将省略求和号$\sum$. 需要注意的是, 不同的求和要用不同的重复上下指标字母.

现在我们可以直接令

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} \boldsymbol{r}_k + \lambda_{ij} \boldsymbol{n}, & i, j = 1, 2 \\ \boldsymbol{n}_i = \sum\limits_{j=1}^{2} \mu_i^j \boldsymbol{r}_j, & i = 1, 2 \end{cases} \tag{2.1}$$

其中Γ_{ij}^k, λ_{ij}, μ_i^j都是待定系数.

- 确定λ_{ij} (2.1)的前一式两边与$\boldsymbol{n}$作内积, 即得$\lambda_{ij} = b_{ij}$(第二基本形式系数).
- 确定Γ_{ij}^k

$$\begin{aligned} g_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \boldsymbol{r}_{il} \cdot \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_{jl}, \quad l = 1, 2 \\ g_{il} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_l \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_l + \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_{lj}, \quad l = 1, 2 \\ g_{jl} = \boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{r}_l \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} = \boldsymbol{r}_{ji} \cdot \boldsymbol{r}_l + \boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{r}_{li}, \quad l = 1, 2 \end{aligned}$$

注意到$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ji}$, 所以

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right) = \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_l = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k g_{kl},$$

命(g^{ij})是(g_{ij})的逆矩阵, 即$\sum\limits_{k=1}^{2} g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i = \begin{cases} 1, & i = l \\ 0, & i \neq l \end{cases}$, 则

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^{2} \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right), \quad i, j, k = 1, 2 \tag{2.2}$$

Γ_{ij}^k称为Christoffel记号, 简称克氏记号. 由(2.2)式不难发现$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, 且由曲面的第一类基本量完全确定.

- 确定μ_i^j 将(2.1)的后一式两边与$\boldsymbol{r}_k$作内积, 得到

$$\mu_i^j = -\sum_{k=1}^{2} g^{jk} b_{ik}.$$

至此我们得到了曲面自然标架$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\}$的**运动方程**:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}, & \\ \boldsymbol{r}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + b_{ij}\boldsymbol{n}, & \text{(Gauss formula)} \\ \boldsymbol{n}_i = -\sum\limits_{k,j=1}^{2} g^{jk} b_{ki} \boldsymbol{r}_j, & \text{(Weingarten formula)} \end{cases} \tag{2.3}$$

其中线性组合的系数由曲面的第一类基本量(及其一阶偏导数)和第二类基本量完全确定.

回到Gauss的记号, 从Christoffel符号Γ_{ij}^k的表达式可以求出

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{EG-F^2}\left(\frac{G}{2}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial F}{\partial u}\right), \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{EG-F^2}\left(-\frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{E}{2}\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial F}{\partial u}\right), \\
\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{EG-F^2}\left(\frac{G}{2}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right), \\
\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{EG-F^2}\left(-\frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{E}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right), \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{EG-F^2}\left(G\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{G}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right), \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{EG-F^2}\left(-F\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{F}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{E}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

特别, 当(u,v)是曲面的正交参数时, 我们有$F\equiv 0$, 上述各式可简化为

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln E}{\partial u}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}, \\
\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln E}{\partial v}, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial u}, \\
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial v}.
\end{aligned}$$

习题 3–2

1. 平面上取极坐标系时, 第一基本形式为$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2$. 试计算$\Gamma_{ij}^k$.
2. 验证曲面的平均曲率$H = \frac{1}{2}b_{ij}g^{ij}$.
3. 验证$R_{ijk}^l = -K(\delta_j^l g_{ik} - \delta_k^l g_{ij})$, 其中$K$是曲面的Gauss曲率.