第 3 章

活动标架与曲面论的基本定理

曲线论中, 我们在 $\mathbb{R}^3$ 的合同变换群观点下讨论了曲线的两个基本不变量—曲率和挠率; 反过来, 曲线论的基本定理告诉我们, 这两个基本量可以完全刻画曲线, 即"给出两个连续函数 $\kappa(s) > 0, \tau(s)$, 则能确定惟一(允许相差一个合同变换) 一条曲线 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, 以 s 作为弧长参数, 且以 $\kappa(s), \tau(s)$ 为其曲率和挠率."

曲面论中, 我们同样讨论了曲面的两个基本不变量—第一基本型和第二基本型(至于曲面上曲线的弧长、两条曲线的夹角、曲面域的面积、法曲率、主曲率、高斯曲率, 平均曲率等都是由第一基本型和第二基本型完全确定的量), 他们本质上是关于参数微分 du, dv 的二次型, 通称二次微分式, 其中第一基本形式是正定的二次微分式, 它刻画了曲面上曲线的弧长微元; 而第二基本形式反映了曲面在空间中的形状. 类似于曲线论的基本定理, 我们自然提出如下问题:

给出两个关于 du, dv 的二次微分形式,

$$E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2,$$
$$L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2,$$

能否确定 $\mathbb{R}^3$ 中一张参数曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, 使得它以这两个微分形式作为它的第一和第二基本形式? 如果这样的曲面存在的话, 它是否惟一?

事实上, 要确定一张曲面 $S : \boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ 只需要确定三个函数 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$, 而给出了两个微分形式相当于给出了六个函数 $E(u,v), F(u,v)$, $G(u,v); L(u,v), M(u,v), N(u,v)$. 因此可以想象到, 若由给出的六个函数可以确定一张曲面, 以它们为第一及第二基本形式系数, 那么这六个函数之间一定存在着某种关系, 而且可以猜想到这六个函数之间应满足三个关系.

本章的目的在于找出上述猜测的三个关系式, 即Gauss方程和Codazzi方程, 然后证明当六个函数满足Gauss方程和Codazzi方程时, 则存在一张曲面, 它的第一和第二基本形式正好是给定的两个二次微分形式, 并且在相差一个$\mathbb{R}^3$的合同变换下, 曲面是惟一的. 还将讨论由此引出的有关曲面理论的较深刻的结果. 我们将用自然标架和正交标架两种方法讨论这些问题.

3.1 曲面上的活动标架

设$S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$是$\mathbf{R}^3$中参数曲面, 其上的**(光滑)向量场**$\boldsymbol{X}(u,v)$是指对于$S$上的任意一点$\boldsymbol{r}(u,v)$, $\boldsymbol{X}(u,v)$是从点$\boldsymbol{r}(u,v)$出发的一个向量, 并且$\boldsymbol{X}(u,v)$光滑地依赖于参数(u,v). 所谓曲面上的**活动标架(场)**是指以曲面S上的点为原点的$\mathbb{R}^3$的坐标系$\{\boldsymbol{r}(u,v);\boldsymbol{X}_1(u,v),\boldsymbol{X}_2(u,v),\boldsymbol{X}_3(u,v)\}$, 其中$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$是曲面$S$上的处处线性无关的向量场. 于是, 我们可以简单地说曲面S的一个活动标架就是曲面S的每一点赋予了$\mathbb{R}^3$的一组标架. 一般我们要求$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)>0$以保证这些标架均是正定的. 特别地, 如果$\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3\}$为单位正交标架, 则称$\{\boldsymbol{r}(u,v);\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3\}$为曲面$S$的**正交(活动)标架**.

通过研究曲面上的任意标架来研究曲面与标架无关的几何性质, 是微分几何学的一个基本方法. 为了使标架$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3\}$能准确反映曲面的几何性质, 我们要求$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$是曲面的切向量.

例如, $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$是曲面$S$上切向量场的两个自然例子, $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$是曲面的(单位)法向量场. 显然, $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}$线性无关, 因此$\{\boldsymbol{r}(u,v);\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}\}$构成了以$\boldsymbol{r}(u,v)$为原点的$\mathbf{R}^3$的一个标架, 这些标架的全体称为参数曲面$S$的**自然标架(场)**. 对自然标架$\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$施行Schmidt正交化, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1&=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle}}=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\\ \boldsymbol{e}_2&=\frac{\boldsymbol{r}_v-\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{r}_v-\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1|}=\frac{E\boldsymbol{r}_v-F\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}\sqrt{EG-F^2}}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$是曲面切平面的单位正交基. 令

$$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\boldsymbol{n},$$

则 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 是 S 的一个(正定向)正交标架.

在曲线论基本定理的证明过程中, Frenet-Serret 公式是一个重要工具. 回想她的得到过程, 我们首先挑选了附着在曲线上的一个标架, 即 Frenet-Serret 标架, 然后对该标架进行微商, 并将微商后的标架向量按 Frenet-Serret 标架做分解, 这就得到了 Frenet-Serret 公式. 这一套做法形成了一个所谓的"**活动标架法**". 对曲面的存在性问题的讨论, 我们将继续演练活动标架法. 回顾前面的讨论, 对曲面我们手头已有两套标架—自然标架和正交标架, 接下来的工作当然是进行微商了.