2.7 特殊曲面

在这一节我们介绍几个特殊的曲面, 它们都有着明显的几何意义, 包括直纹曲面, 可展曲面, 全脐点曲面和极小曲面.

2.7.1 直纹曲面

由连续族直线形成的曲面称为**直纹曲面**, 简称**直纹面**. 这族直线中每一条都称为直纹面的**直母线**. 如柱面(母线平行), 锥面(母线交于一点), 单叶双曲面, 双曲抛物面, 空间曲线的切线曲面等都是直纹面.

设 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 是一直纹面, 在 S 上取一条曲线 $C: \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(u), u \in (a,b)$, 它和所有直母线都相交, 这样的曲线 C 称为直纹面的**导线**(注意导线的取法不唯一). 令 $\boldsymbol{b}(u)$ 是过导线 C 上点 $\boldsymbol{a}(u)$ 处的直母线的方向矢量, 则直纹面的参数方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u), \quad a \le u \le b, \quad -\infty < v < +\infty. \tag{7.1}$$

这里, 直纹面的 v-曲线正是直纹面的直母线; u-线为一族与 v-线相交的曲线, (其中对应于 $v = 0$ 的那条就是导线 C).

对于以 $\boldsymbol{a}(u)$ 为导线的直纹曲面 $S: \boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u)$,

(1) 若 $\boldsymbol{a}(u)$ 缩成一点, 则 S 是锥面;

(2) 若 $\boldsymbol{b}(u)$ 是常向量, 则 S 为柱面;

(3) 若 $\boldsymbol{b}(u) = \boldsymbol{a}'(u)$, 则 S 是导线的切线面;

(4) 若 $\boldsymbol{b}(u)$ 是导线的主法向量, 则 S 是导线的主法线曲面;

(5) 若 $\boldsymbol{b}(u)$ 是导线的副法向量, 则 S 是导线的副法线曲面.

2.7.2 可展曲面

对直纹曲面 (7.1), 其法向量

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b} + v\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{b},$$

显然, 当 $(\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b}) \nparallel (\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{b})$, 沿直母线(即 v 线), 法向量要改变方向, 这时直纹面的切平面将绕直母线而旋转; 而当 $(\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b}) \parallel (\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{b})$, 沿直母线, 法向量只改变模长而不改变方向, 这时直纹面沿直母线就只有一个切平面. 由此可见, 一般地直纹曲面沿每条直母线切平面将绕直母线转动.

直纹曲面若沿着它的每条直母线都只有一个切平面, 或者说沿直母线, 法向量平行, 则称其为**可展曲面**. 根据定义, 显然柱面和锥面都是可展曲面.

定理 7.1 直纹面 $S:\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$ 是可展曲面当且仅当

$$(\boldsymbol{a}'(u),\boldsymbol{b}(u),\boldsymbol{b}'(u))=0. \tag{7.2}$$

证明 首先直纹面 S 的法向量为 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=(\boldsymbol{a}'+v\boldsymbol{b}')\times\boldsymbol{b}$, 设 v_1, v_2 是任意一条直母线(即 $u=\text{const.}$)上两不同的点对应的参数, 则

$$\begin{aligned}
&[(\boldsymbol{a}'+v_1\boldsymbol{b}')\times\boldsymbol{b}]\times[(\boldsymbol{a}'+v_2\boldsymbol{b}')\times\boldsymbol{b}]=0\\
\Longleftrightarrow\ &(v_2-v_1)(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b})=0\\
\Longleftrightarrow\ &(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}'-(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')\boldsymbol{b}=0\\
\Longleftrightarrow\ &(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')\boldsymbol{b}=0\\
\Longleftrightarrow\ &(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0.
\end{aligned}$$

可见, 沿着直母线法向量平行的充要条件是 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$, 即直纹面 S 为可展曲面的充要条件是 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$. □

用 (7.2) 式容易验证柱面、锥面、空间曲线的切线曲面均为可展曲面. 下面我们将证明可展曲面局部地只有这三种类型.

定理 7.2 可展曲面局部地或为柱面, 或为锥面, 或为某条空间曲线的切线曲面.

证明 设直纹面 $S:\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$ 为可展曲面, 则由定理 7.1, $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$, 即 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}'$ 线性相关, 于是存在不全为零的实函数 $\lambda(u),\mu(u),\nu(u)$, 使

$$\lambda\boldsymbol{a}'+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{b}'=0. \tag{7.3}$$

(Ⅰ) 若 $\lambda=0$, 则 μ 和 ν 不能同时为 0, 由 (7.3) 知 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{b}'$, 于是 $\boldsymbol{b}$ 具有固定方向, 这时曲面为柱面.

(Ⅱ) 若 $\lambda\neq0$, 令 $t=-\frac{\mu}{\lambda}$, $s=-\frac{\nu}{\lambda}$, 则

$$\boldsymbol{a}'(u)=t\ \boldsymbol{b}(u)+s\ \boldsymbol{b}'(u),$$

将 S 的方程改写成

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(\boldsymbol{a}(u)-s\ \boldsymbol{b}(u))+(v+s)\boldsymbol{b}(u),$$

并令 $\boldsymbol{a}^*(u)=\boldsymbol{a}(u)-s\boldsymbol{b}(u)$, 则

$$\frac{d\boldsymbol{a}^*(u)}{du}=(t-s')\boldsymbol{b}(u).$$

① 若 $t=s'$, 则 $\boldsymbol{a}^*(u)$ 是常向量, 记为 $\boldsymbol{a}^*$. 作参数变换

$$\begin{cases}\bar{u}=u,\\ \bar{v}=v+s,\end{cases} \tag{7.4}$$

则因为 $\left|\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}\right|=1\neq 0$, 故参数变换 (7.4) 是容许的参数变换, 以 $(\bar{u},\bar{v})$ 作为新参数时, 曲面 S 的方程可写成

$$\boldsymbol{r}(\bar{u},\bar{v})=\boldsymbol{a}^*+\bar{v}\ \boldsymbol{b}(\bar{u}),$$

它表示以 $\boldsymbol{a}^*$ 为顶点, 以 $\boldsymbol{b}(\bar{u})$ 为直母线方向的锥面.

② 若 $t\neq s'$, 则从 $\frac{d\boldsymbol{a}^*(u)}{du}=(t-s')\boldsymbol{b}(u)$ 得

$$\boldsymbol{b}(u)=\frac{1}{t-s'}\ \frac{d\boldsymbol{a}^*(u)}{du},$$

作参数变换

$$\begin{cases}\bar{u}=u,\\ \bar{v}=\frac{v+s}{t-s'},\end{cases} \tag{7.5}$$

则因为 $\left|\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}\right|\neq 0$, 故参数变换 (7.5) 是容许的参数变换, 即 $(\bar{u},\bar{v})$ 可作为曲面的新参数. 此时, 曲面的方程可写成

$$\boldsymbol{r}(\bar{u},\bar{v})=\boldsymbol{a}^*(\bar{u})+\bar{v}\ \frac{d\boldsymbol{a}^*(\bar{u})}{d\bar{u}},$$

它表示曲线 $\boldsymbol{a}^*(\bar{u})$ 的切线曲面. □

定理 7.3 无平点的曲面为可展曲面 $\Longleftrightarrow$ 高斯曲率 $K\equiv 0$.

证明 ($\Rightarrow$) 设直纹曲面 $S:\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$ 为可展曲面, 则 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$. 现在来计算曲面 S 的高斯曲率. 首先由 $\boldsymbol{r}_{vv}=0$ 得 $N=$

$\boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{n} = 0$; 其次

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_{uv}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\boldsymbol{a}'(u), \boldsymbol{b}(u), \boldsymbol{b}'(u)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = 0.$$

($\Leftarrow$) 现在我们来证明, 若曲面 S 的高斯曲率 $K \equiv 0$, 则 S 为可展曲面.

由 $K \equiv 0$ 知 S 上的点都是(非平点的)抛物点, 其上有唯一一族渐近曲线. 取渐近曲线作为参数曲线中 u-线, 则由渐近线的微分方程 $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$ 知 $L = 0$. 此时由 $K = 0$ 知 $M = 0$, $N \neq 0$(否则为平点).

$$\left.\begin{aligned} L = 0 &\Longleftrightarrow \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_u = 0 \\ M = 0 &\Longleftrightarrow \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n}_u = 0 \\ \boldsymbol{n}^2 = 1 &\Longrightarrow \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_u = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{n}_u = 0,$$

这说明 $\boldsymbol{n}$ 只是 v 的函数, 可设 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(v)$, 即沿每条 u-线, 曲面 S 的法向量是常向量. 如果我们能证明每条 u-曲线都是直线, 那么可以断定 S 为可展曲面.

一方面, 由 $M = -\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = 0$ 知 $\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_v) = 0$, 注意到 $\boldsymbol{n}_{uv} = 0$ ($\boldsymbol{n}$ 只是 v 的函数), 所以 $\boldsymbol{n}_v \cdot \boldsymbol{r}_{uu} = 0$, 再结合 $L = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_{uu} = 0$ 得

$$\boldsymbol{r}_{uu} \parallel (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_v).$$

另一方面, 由 $M = -\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = 0$ 及 $\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n} = 0$ 得

$$\boldsymbol{r}_u \parallel (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_v).$$

结合以上两方面, 我们知 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_{uu} = 0$, 于是 u-线的曲率 $\kappa = \frac{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_{uu}|}{|\boldsymbol{r}_u|^3} = 0$. 故 u-曲线是直线. 所以曲面 S 是可展曲面. □

注 1 由必要性的证明可见, 直纹面的高斯曲率一定非正.

注 2 定理7.3的必要性无需假设曲面上不含平点, 但对充分性部分, 若 S 上的点都是平点, 则 S 必为平面. 故充分性也成立. 但若 S 上含有孤立平

点, 或某一曲线上的点都是平点, 那么定理7.3的充分性不一定成立, 即存在这样的曲面, 它的高斯曲率$K \equiv 0$, 但不是可展曲面. 参阅**Klingenberg**所著《**A course in Differential Geometry**》P_{68}.

2.7.3 全脐点曲面

全部由脐点构成的曲面称为**全脐点曲面**. 由于脐点即曲面上满足$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}$的点, 因此, 曲面是全脐点曲面当且仅当曲面的第二基本形式与第一基本形式成比例, 即存在曲面上的函数$\lambda(u,v)$, 使得$I\!I=\lambda I$. 下面定理给出仅有的全脐点曲面.

定理 7.4 曲面是全脐点曲面当且仅当曲面是平面或球面(或它们的一部分).

证明 ($\Longleftarrow$) 对平面, 因法向量$\boldsymbol{n}$为常向量, 所以$I\!I=-d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}\equiv 0$, 等价地, $L=M=N=0$, 于是平面为全脐点曲面.

对半径为a, 中心径矢为$\boldsymbol{r}_0$的球面, 其单位法矢量$\boldsymbol{n}=\pm\frac{1}{a}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$, 于是

$$I\!I=-d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=\pm\frac{1}{a}I.$$

等价地, $\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=\pm\frac{1}{a}$, 即球面为全脐点曲面.

($\Longrightarrow$) 设$S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$是全脐点曲面, 则存在函数$\lambda(u,v)$, 使得

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=\lambda(u,v), \tag{7.6}$$

我们首先证明$\lambda(u,v)$是常数, 进而根据该常数是零或非零来区分曲面是平面或球面.

$$\left.\begin{aligned} L=\lambda E &\Rightarrow (\boldsymbol{n}_u+\lambda\boldsymbol{r}_u)\cdot\boldsymbol{r}_u=0\\ M=\lambda F &\Rightarrow (\boldsymbol{n}_u+\lambda\boldsymbol{r}_u)\cdot\boldsymbol{r}_v=0\\ \boldsymbol{n}^2=1 &\Rightarrow (\boldsymbol{n}_u+\lambda\boldsymbol{r}_u)\cdot\boldsymbol{n}\ \ =0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{n}_u+\lambda\boldsymbol{r}_u=0, \tag{7.7}$$

$$\left.\begin{aligned} M=\lambda F &\Rightarrow (\boldsymbol{n}_v+\lambda\boldsymbol{r}_v)\cdot\boldsymbol{r}_u=0\\ N=\lambda G &\Rightarrow (\boldsymbol{n}_v+\lambda\boldsymbol{r}_v)\cdot\boldsymbol{r}_v=0\\ \boldsymbol{n}^2=1 &\Rightarrow (\boldsymbol{n}_v+\lambda\boldsymbol{r}_v)\cdot\boldsymbol{n}\ \ =0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{n}_v+\lambda\boldsymbol{r}_v=0, \tag{7.8}$$

(7.7) 式两边对 v 求偏导, (7.8) 式两边对 u 求偏导, 并将结果相减得到

$$\lambda_v \boldsymbol{r}_u - \lambda_u \boldsymbol{r}_v = 0,$$

由于 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 线性无关, 所以 $\lambda_u = 0$, 且 $\lambda_v = 0$, 即 $\lambda(u,v)$ 是常值函数, 记为 λ_0. 这时, (7.7) 和 (7.8) 式等价于 $\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{n}+\lambda_0\boldsymbol{r}) = \frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{n}+\lambda_0\boldsymbol{r}) = 0$, 即

$$\boldsymbol{n}+\lambda_0\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0\,(\text{常向量}).$$

(1) 若 $\lambda_0 = 0$, 则 $\boldsymbol{n}$ 是常向量, 所以曲面为平面.

(2) 若 $\lambda_0 \neq 0$, 则

$$\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{r}_0}{\lambda_0}\right)^2 = \left(-\frac{\boldsymbol{n}}{\lambda_0}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_0^2},$$

这表明曲面 S 是以 $\frac{1}{\lambda_0}\boldsymbol{r}_0$ 为中心, $\frac{1}{|\lambda_0|}$ 为半径的球面. □

2.7.4 极小曲面

平均曲率恒为 0 的曲面称为**极小曲面**. 由公式 $H = \frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}$ 得, 曲面为极小曲面的必要充分条件是 $EN-2FM+GL=0$. 熟知, 平面、正螺面都是极小曲面.

下面我们对“极小”一词做些几何上的说明.

设参数曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v),\quad (u,v)\in D$, 一般地, 我们设 D 是单连通的, 用 ∂D 表示参数区域 D 的边界, 对应曲面的边界记为 ∂S. 令 $h(u,v)$ 是 D 上的连续可微函数(至少 C^2), 且 $h(u,v)|_{\partial D} = 0$. 曲面 S 的由 h 决定的法向变分是下面给出的映照

$$\varphi: D\times(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\varphi(u,v,t) = \boldsymbol{r}(u,v) + th(u,v)\boldsymbol{n}(u,v),$$

$$(u,v)\in D,\quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

对每一个固定的 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 由 φ 决定的参数曲面记为 S^t, 它的参数方程为

$$\boldsymbol{r}^t(u,v) = \boldsymbol{r}(u,v) + th(u,v)\boldsymbol{n}(u,v), \tag{7.9}$$

注意到 $h(u,v)|_{\partial D} = 0$, 所以 $\partial S^t = \partial S$, 且 $S^t|_{t=0} = S$.

现在我们来计算曲面 S^t 的面积 $A(t)$, 并考察面积函数 $A(t)$ 在 $t=0$ 附近的性质. 为此, 记 E^t, F^t, G^t 是曲面 S^t 的第一基本形式系数. 由 (7.9) 式有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u^t &= \boldsymbol{r}_u + th\boldsymbol{n}_u + th_u\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{r}_v^t &= \boldsymbol{r}_v + th\boldsymbol{n}_v + th_v\boldsymbol{n}, \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} E^t &= \boldsymbol{r}_u^t \cdot \boldsymbol{r}_u^t = E - 2thL + t^2(h^2\boldsymbol{n}_u^2 + h_u^2), \\ F^t &= \boldsymbol{r}_u^t \cdot \boldsymbol{r}_v^t = F - 2thM + t^2(h^2\boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{n}_v + h_u h_v), \\ G^t &= \boldsymbol{r}_v^t \cdot \boldsymbol{r}_v^t = G - 2thN + t^2(h^2\boldsymbol{n}_v^2 + h_v^2). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} E^tG^t - (F^t)^2 &= (EG - F^2) - 2th(EN - 2FM + GL) + o(t) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + o(t), \end{aligned} \tag{7.10}$$

因此

$$\begin{aligned} A(t) &= \iint\limits_D \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2}\, dudv \\ &= \iint\limits_D \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + o(t)}\, dudv \end{aligned} \tag{7.11}$$

定理 7.5 曲面 S 为极小曲面当且仅当 S 的面积达到临界值, 即

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

证明 由 (7.11) 式容易得到

$$\begin{aligned} \left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} &= \iint\limits_D \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + o(t)}\, dudv \\ &= -\iint\limits_D 2hH\sqrt{EG - F^2}\, dudv, \end{aligned} \tag{7.12}$$

现在如果平均曲率 $H \equiv 0$, 则由 (7.12) 式知, $\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$, 必要性得证.

反之, 若 $\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$, 我们用反证法证明 $H \equiv 0$. 反设曲面在一点 $P(u_0, v_0)$ 处的平均曲率不为 0, 不妨设 $H(u_0, v_0) > 0$, 于是由连续性, 存在 (u_0, v_0) 的一个小邻域 $D^* \subset D$, 使得 $H|_{D^*} > 0$. 取 C^2 函数

$$h = \begin{cases} h(u,v) > 0, & (u,v) \in D^* \text{ 的内部} \\ h(u,v) = 0, & \text{其它} \end{cases}$$

这时, (7.12) 式右端小于 0, 与 $\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$ 矛盾, 类似地证明 $H(u,v) < 0, (u,v) \in D^*$ 也不可能. 从而反设不成立, 即曲面为极小曲面. □

注 3 上述定理说明极小曲面是使面积的第一变分为零的曲面, 由分析知道, 使 $A(t)$ 在 $t = 0$ 处达到临界值, 并非真正极小, 要检验是否真正达到极小, 必须计算 $\left.\frac{d^2A(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$. 因此, 极小一词未必十分合适. 不过这个术语已经使用了一个较长的时期, 它是由 Lagrange 于 1760 年首先定义的.

注 4 这个定理也没有证明极小曲面的存在性, 即给定了一条空间封闭曲线, 能否找到以它为边界的曲面, 使其面积达到最小? 这个问题由 Plateau 在 1866 年提出, 即历史上有名的 Plateau 问题, 直到二十世纪三十年代由 Rado (1930) 和 Douglaus (1931) 两人在广义解的范围内独立解决, 在 1970 年左右由 Osserman 才证明所得到的曲面是处处正则的.

习题 2–7

1. 证明双曲抛物面 $\boldsymbol{r}(u,v) = (a(u+v), b(u-v), 2uv)$ 和单叶双曲面 $\boldsymbol{r}(u,v) = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u)$ 均是不可展曲面, 其中 a、b、c 是正常数.

【证明】 令 $\boldsymbol{A}(u) = (au, bu, 0)$, $\boldsymbol{B}(u) = (a, -b, 2u)$, 则双曲抛物面的方程可改写成

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{A}(u) + v\boldsymbol{B}(u),$$

于是直接验证可得

$$(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}') = -4ab \neq 0,$$

因此, 双曲抛物面是不可展曲面.

直接计算可得到单叶双曲面的第二基本形式为

$$I\!I = \frac{abc(-du^2 + \cosh^2 u dv^2)}{\sqrt{b^2c^2\cosh^2 u\cos^2 v + a^2c^2\cosh^2 u\sin^2 v + a^2b^2\sinh^2 u}},$$

由此显然可见, 单叶双曲面上无平点. 再者,

$$LN - M^2 = \frac{-a^2b^2c^2\cosh^2 u}{b^2c^2\cosh^2 u\cos^2 v + a^2c^2\cosh^2 u\sin^2 v + a^2b^2\sinh^2 u} < 0,$$

即 $K \neq 0$. 根据定理6.3知, 单叶双曲面为不可展曲面.

2. 证明下列曲面均为极小曲面:

(1) $z = c\arctan\frac{y}{x}$, 这里 $x > 0, -\infty < y < \infty$, c 是非零常数.

(2) Scherk 曲面 $\boldsymbol{r}(u,v) = \big(u, v, \frac{1}{u}\ln\frac{\cos av}{\cos au}\big)$, 这里 a 是正常数, $-\frac{\pi}{2a} < u, v < \frac{\pi}{2a}$.

(3) Ennepe 曲面 $\boldsymbol{r}(u,v) = (3u(1+v^2) - u^3, 3v(1+u^2) - v^3, 3(u^2 - v^2))$, 其中 $-\infty < u, v < \infty$.

(4) 悬链面 $\boldsymbol{r}(u,v) = \big(a\cosh(\frac{v}{a} + b)\cos u, a\cosh(\frac{v}{a} + b)\sin u, v\big)$, 这里 a, b 都是正常数, 而且 $a \neq 0, -\infty < u, v < \infty$.

【证明】 (1) 令 $\boldsymbol{r}(u,v) = (u, v, c\arctan\frac{v}{u})$, 直接计算得到

$$E = 1 + \frac{c^2v^2}{(u^2+v^2)^2}, \quad F = -\frac{c^2uv}{(u^2+v^2)^2}, \quad G = 1 + \frac{c^2u^2}{(u^2+v^2)^2},$$

$$L = \frac{2cuv}{\Delta}, \quad M = \frac{c(v^2-u^2)}{\Delta}, \quad N = -\frac{2cuv}{\Delta},$$

其中 $\Delta = (u^2+v^2)\sqrt{(u^2+v^2)(u^2+v^2+c^2)}$. 这时容易验证 $EN - 2FM + GL = 0$.

(2) 直接计算得到

$$E = \sec^2 au, \quad F = -\tan au\tan av, \quad G = \sec^2 av,$$

$$L = \frac{a\sec^2 au}{\sqrt{1+\tan^2 au + \tan^2 av}}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{a\sec^2 au}{\sqrt{1+\tan^2 au+\tan^2 av}},$$

这时立即可验证 $EN - 2FM + GL = 0$.

(3) 直接计算有

$$E = G = 9(1+u^2+v^2)^2, \quad F = 0,$$

$$L = 6, \quad M = 0, \quad N = -6.$$

由于 $F = M = 0$, 从而参数曲线网成为曲率线网, 两个主曲率之和为

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{L}{E} + \frac{N}{G} = 0,$$

故 $H \equiv 0$, 即 Ennepe 曲面是极小曲面.

(4) 直接计算有

$$E = a^2\cosh^2(\frac{v}{a} + b), \quad F = 0, \quad G = \cosh^2(\frac{v}{a} + b),$$

$$L=-a,\quad M=0,\quad N=\frac{1}{a},$$

由于 $F=M=0$, 从而参数曲线网为曲率线网, 两个主曲率之和为

$$\kappa_1+\kappa_2=\frac{L}{E}+\frac{N}{G}=0,$$

故 $H\equiv 0$, 即悬链面是极小曲面.

3. 证明旋转极小曲面必为悬链面.

【证明】 设旋转曲面是由 $y=f(z)$ 绕 z 轴旋转所得, 因而它的方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\{f(v)\cos u, f(v)\sin u, v\},$$

经过计算得到其第一、第二类基本量分别为

$$E=1+f'^2,\quad F=0,\quad G=f^2,$$

$$L=-\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}},\quad M=0,\quad N=\frac{f}{\sqrt{1+f'^2}},$$

故由 $H=0$ 得

$$1+f'^2=ff'',$$

或

$$\frac{df}{f}=\frac{d(f')^2}{2(1+f'^2)},$$

积分得

$$f=a\sqrt{1+f'^2},$$

其中 $a>0$ 是积分常数. 从上式中解出 f' 得

$$f'=\pm\sqrt{\left(\frac{f}{a}\right)^2-1},$$

或

$$dv=\pm\frac{df}{\sqrt{\left(\frac{f}{a}\right)^2-1}},$$

再积分得

$$\frac{v}{a}+b=\pm\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{f}{a}\right)\quad \text{或}\quad f=a\ \mathrm{ch}\left(\frac{v}{a}+b\right),$$

其中 b 为积分常数. 这说明旋转曲面是由 $y=a\ \mathrm{ch}(\frac{z}{a}+b)$ 绕 z 轴旋转而成, 即悬链面.

4. 除平面外, 直纹极小曲面必为正螺面.

【证明】 首先我们熟知, 极小曲面上两族渐近曲线是正交的. 再者, 直纹曲面的直母线是渐近曲线. 于是对极小直纹曲面Σ, 可设$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$是其上与直母线正交的另一族渐近曲线中的一条, s为自然参数, 那么极小直纹曲面Σ的方程可写成

$$\boldsymbol{r}(s,v)=\boldsymbol{r}(s)+v\boldsymbol{b}(s),$$

其中$\boldsymbol{b}(s)$是直母线的单位向量, 并记曲线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$的基本向量分别为$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$, 曲率和挠率分别为$\kappa,\tau$, 曲面$\Sigma$单位法向量仍记为$\boldsymbol{n}$.

$$\left.\begin{array}{r}\text{由渐近曲线的正交性}\ \Rightarrow \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{b}=0\\ \text{由}\boldsymbol{r}(s)\text{是渐近线}\ \Rightarrow \boldsymbol{B}=\pm\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{b}=\pm\boldsymbol{N}$$

于是Σ的方程又可写成

$$\boldsymbol{r}(s,v)=\boldsymbol{r}(s)+v\boldsymbol{N}(s),$$

利用Frenet公式可直接计算得到

$$\boldsymbol{r}_s=(1-v\kappa)\boldsymbol{T}+v\tau\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{N},$$

$$\boldsymbol{r}_{ss}=-v\frac{d\kappa(s)}{ds}\boldsymbol{T}+(\kappa-v\kappa^2-v\tau^2)\boldsymbol{N}+v\frac{d\tau(s)}{ds}\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{r}_{vv}=0,$$

显然, 第一类基本量$F=\boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_v=0$, $G=\boldsymbol{r}_v^2=1$, 第二类基本量$N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=0$. 这时由曲面$\Sigma$的平均曲率$H=0$知$L=0$, 即

$$L=\boldsymbol{r}_{ss}\cdot\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{r}_s,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{ss})=0,$$

将基本量代入上式, 得到

$$\left[\frac{d\tau(s)}{ds}+v\left(\tau\frac{d\kappa(s)}{ds}-\kappa\frac{d\tau(s)}{ds}\right)\right](\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})=0,$$

或

$$\frac{d\tau(s)}{ds}+v\left(\tau\frac{d\kappa(s)}{ds}-\kappa\frac{d\tau(s)}{ds}\right)=0,$$

上式对任何v都成立, 因此有$\frac{d\tau(s)}{ds}=0$及$\tau\frac{d\kappa(s)}{ds}=0$. 于是$\tau=0$或$\frac{d\kappa(s)}{ds}=0$.

当$\tau=0$时, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$是平面曲线, 故$\Sigma$为平面.

当$\frac{d\kappa(s)}{ds}=0$时, κ,τ均为常数, 从而$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$是圆柱螺线, 此时$\Sigma$是圆柱螺线的主法线曲面, 也即正螺面.

5. 证明: 曲面为球面或平面的充分必要条件是$H^2=K$.

6. 证明: 若曲面上所有曲线均为曲率线, 则它必然为全脐点曲面.

7. 证明: 曲面为极小曲面的充分必要条件是: 曲面上存在两族正交的渐近曲线.